公務員試験

過去問攻略Ｖテキスト❸

数的処理(上)[第２版]

TAC公務員講座 編

体験入学用抜粋版

【 ご 案 内 】

当教材は、体験入学用の抜粋版で、**数的処理の第1回講義**の該当範囲の内容となっております。

1 数的推理の基本

この節では、第１章（数的推理）の中で通して使う知識やテクニックを紹介します。本書を丹念に読み進めていけば、ここでまとめた内容が数的推理に限らず数的処理全体で使い続ける知識やテクニックであることに気づくはずです。この節の内容を常に念頭に入れながら本書を読み進めましょう。

数的推理では、次の大きな５個のポイントに留意しながら問題を解いていくとよい。そこで第１章では、さらに細かく10個のポイントに分類し、各ポイントを明示するために10種類の **記号** でタグ付けした。

1 テーマの把握

文章をよく読んで、情報を正確に読み取る。 **テーマの把握**

重要な条件には、アンダーラインを引いたり、囲み を付けたりしながら、文章に書かれている内容や問題の「型（かた）」から、テーマを把握する。

2 目標の設定・選択肢のチェック

❶ **目標**（求めたい量や知りたい量）**を明確にする。** **目標**

❷ **問題文を読んだあとは、選択肢も必ずチェックする**ようにする。 **選択肢**

選択肢はその問題の目標そのものである。したがって、問題文を読むときは必ず選択肢を見る習慣をつけるようにしたい。また、公務員の択一試験は選択肢が五肢択一であるから、正解が必ず１つ含まれる。見方を変えれば、選択肢は問題を解くヒントになり得る。

3 公式や解法のポイント

問題のテーマや型に応じて公式や解法のポイントを覚える。 **公式** **解法のポイント**

4 場合分け

「Aが成り立つ」場合を考えたときは、必ず「Aが成り立たない」場合を考えるようにすることが、場合分けの基本である。 場合分け

5 テクニック

問題の内容を「正確に」、「具体的に」イメージができることが、問題をスムーズに解くカギになる。そこで問題を解くテクニックとして、数的推理では次の４つのテクニックを頻繁に用い、それぞれ、次のような４つのタグで表す。

具体化　基準　作図　表

1 具体化

① 名前を付けて具体化する

人やものをアルファベットでA、B、C、…と順序付けする、数字で❶、❷、❸、…とナンバリングする、などしながら具体化するとよい。

② 文字をおく

未知数があれば、この未知数に文字をおくことで具体化する。

「目標(求めたい量や知りたい量)」$=x$とおくのは、定石の１つである。

※　xには、例えば「x［人］、x［円］、x［個］」などの単位を付けるだけで具体的になる。一方で、文字のおきすぎに注意する。文字のおきすぎは、計算が大変になるばかりでなく、何を求めればよいのか迷ってしまい、正解にたどり着くのに遠回りしてしまう。

③ 数値を代入して、具体的に計算する

例えば、選択肢に正解を含む値が並んでいる場合は、１つずつ代入して確かめるのも一手である。もちろん時間がかかる場合もあるので、選択肢の絞り込みを行い、代入する値が少なくなるように工夫したい。

2 基　準

代表的なテーマとして、割合(第３節)が挙げられるが、**基準を１つ定める**ことにより、**他のものを相対的に数値で表せる**(定量化)。

3 作　図

数的処理(数的推理)では様々な図が登場する。**問題のテーマに応じて、どのような図を描くべきかを覚えておく**ようにする。

4 表

条件など、問題文から読み取るべき情報量が多い場合は、**表に整理**しながら解くとよい。

定石として、表には行と列の**合計の欄を設ける**ようにする。**合計が問題を解くカギになる**こともある。

★★★

2 文章題の基本

この節では数的処理の土台である文章題の基本を学びます。特に、方程式、不等式は数的推理だけでなく、数的処理のあらゆる分野で使う道具であるので、その基本をしっかりマスターしましょう。

1 連立方程式

1 文章題の解き方

文章題では、**文章を読んで状況把握をし、問題のテーマや型に応じて、図や表などにまとめたり、未知数や求めたい量に文字をおく**などして解いていく。

① 文字の種類

代表的な文字のおき方は次の通りである。

❶未知数	・x、y、z、…など ・時間(time)に関する未知数はtを用いることもある
❷名称に対応する文字	・名称に合わせて文字をおく(例：Aさんの年齢＝a［歳］)
❸整数、自然数(正の整数)	・n、m、…など[1]
❹偶数	・$2n$
❺奇数	・$2n-1$
❻連続する2整数	・nと$n+1$
❼比例定数	・k、l、m、n、…など

② 未知数の数と方程式の数

通常、未知数(文字)の数と方程式の数[2]が等しいとき、解が1組定まる。つまり、**未知数の数だけ独立した方程式(これを連立方程式という)を立てれば、解が1組に定まる。**

1 数(number)や自然数(natural number)の頭文字を取ってnと表すことが多い。

2 方程式の数として、方程式を変形して得られたものはカウントしない。変形して得られた方程式を「従属した方程式」といい、従属した方程式は元の方程式と実質「同じもの」である。

※　**未知数には「隠れた条件」が存在することもある**。例えば「人数は自然数（正の整数）である」や「10進法（第５節）での各位の数字は０～９の10種類の数字で表される」などのように、**問題に明記はされていないが、当たり前のことが隠れた条件になる**ことがある。

③ 年齢算

文章題には様々なテーマが存在するが、公務員試験で出題されるテーマの１つに「**年齢算**」がある。「10年後の年齢はAがBの２倍になる」のような、**何年か前や後の年齢に関する文章題**を「年齢算」という。年齢算では、次式を用いて立式する。

年齢算の公式

［（今日からピッタリ）$\boldsymbol{n}$ 年前の年齢］＝（現在の年齢）－ $\boldsymbol{n}$　［歳］
［（今日からピッタリ）$\boldsymbol{n}$ 年後の年齢］＝（現在の年齢）＋ $\boldsymbol{n}$　［歳］

2 連立方程式とその解法のポイント

① 一文字ずつ消去

連立方程式の解の求め方は**一文字ずつ未知数（文字）を消去する**ことが原則である。

② 代入法と加減法

未知数（文字）の消去には**代入法**と**加減法**の２つの方法がある。

例1　次の連立方程式の解を代入法、加減法を使ってそれぞれ求めよ。

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+2y=0 \end{cases}$$

❶　代入法

一方の式をxまたはyについてまとめ(これを「xまたはyについて整理する」という)、**もう一方の式に代入することで、一文字ずつ消去する方法が代入法**である。

下の式を移項して$x=2y$とし、上の式に代入すれば、左辺は$2\times 2y-3y=4y-3y=y$となり、上の式は$y=1$となる。移項した下の式$x=2y$に$y=1$を代入して、$x=2$を得る。

よって、この連立方程式の解は$\underline{x=2、y=1}$である。

❷　加減法

xまたはyの係数(xやyなどの文字に掛けられた数)**をそろえて、２つの式を足したり引いたりして、一文字ずつ消去する方法が加減法**である。

下の式の両辺を２倍して上の式と並べ、２つの式を足し算する。このとき、足し方はxの項どうし、およびyの項どうしを足す。この計算により、xの項が消去され、その結果、下のように$y=1$を得る。

$$\begin{array}{rr} & 2x-3y=1 \\ +) & \underline{-2x+4y=0} \\ & y=1 \end{array}$$

あとは、$-x+2y=0$に$y=1$を代入して移項すれば、$x=2$を得る。

よって、この連立方程式の解は$\underline{x=2、y=1}$である。

例題 1-1

あるコンサートではＡ席、Ｂ席の２種類のチケットを販売しており、チケット１枚あたりの価格はＡ席が8,000円、Ｂ席が6,000円である。販売期間終了後の発表では、２種類で合計2,000枚販売し、1,360万円の売上があったという。Ａ席のチケットは何枚売れたか。

1. 500枚
2. 600枚
3. 700枚
4. 800枚
5. 900枚

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

本問は本書の第１問目なので、問題文の読み方から解説していく。

問題文を読みながら、**問題のテーマも読み取る**。 **テーマの把握**

その際、

❶ **読み間違いの起きやすいところ**（例えばいつも自分が間違えてしまうところ）に波線を引いたり、**数値条件**などの**重要情報**にアンダーラインや 囲み などを入れておく。

❷ **目標**を明確にする。 **目標**

❸ **選択肢**をチェックする。 **選択肢**

の３点を常に行う。

本問のテーマは「**連立方程式**」であり、具体的には次のように行うとよい。

「あるコンサートではＡ席、Ｂ席の２種類のチケットを販売しており、チケット１枚あたりの価格は Ａ席が8,000円 、 Ｂ席が6,000円 である。販売期間終了後の発表では、２種類で合計2,000枚販売条件①し、1,360万円の売上があった条件②という。**Ａ席のチケットは何枚売れたか。** **目標** 」

② 文字のおき方

本問では**求めるもの（目標）**が**Ａ席のチケットの販売枚数**であり、さらに**Ａ席とＢ**

席の販売枚数がわからないもの(未知数)である。そこで、A席の販売枚数をx［枚］、B席の販売枚数をy［枚］とおく。

未知数はxとyの２文字であるから、独立した２式の方程式を立てなければ連立方程式の解が１組に定まらない。本問では「２種類で合計2,000枚販売$_{条件①}$し、1,360万円の売上があった$_{条件②}$」が２つの条件であり、これらから２式の方程式を立てる。

※　A席のチケットの販売枚数をx［枚］とおくと、条件①より、B席の販売枚数は$2{,}000-x$［枚］と表してもよい。

解説

(A席のチケットの販売枚数)＝x［枚］、(B席のチケットの販売枚数)＝y［枚］とおく。**目標**

このとき、「２種類で合計2,000枚販売した」ので、次の式で表せる[3]。

$x+y=2000$［枚］…①(条件①に対応した式)

また、「チケット１枚あたりの価格はA席が8,000円、B席が6,000円である」ことと「1,360万円の売上があった」ので、これは次の式で表せる。

$8000x+6000y=13600000$［円］…②(条件②に対応した式)

②は両辺を2,000で割ることで係数を小さくできる。

$4x+3y=6800$…③

①×3の計算により、$3x+3y=6000$…④として、③のyの係数である３に揃える。

加減法を用い、③－④で$3y$を消去すれば、

$$\begin{array}{rl} & 4x+3y=6800 \\ -) & \underline{3x+3y=6000} \\ & x\quad\ \ =\ \ 800 \end{array}$$

となり、A席のチケットの販売枚数は800枚であることがわかる。**解法のポイント**

※　①より、$y=1200$［枚］となるが、求める必要はない。

正解　4

3　以下では、数式内の３桁ごとのカンマ［,］は煩雑であるため取り除く。

2 不定方程式

1 不定方程式

未知数の数が方程式の数より多いとき、解が定まらない(これを「不定」という)。このような方程式を「不定方程式」という。

数的処理の不定方程式の問題では、解に「自然数」や「０以上の整数」という隠れた条件が付くので、これを利用して解くことが多い。多くの場合、隠れた条件は問題文に明記されていないので注意深く問題文を読む必要がある。

2 不定方程式の解法のポイント

① 選択肢を利用する

選択肢に正解を含む値が並んでいるときは、選択肢を１つずつ代入していくとよい。

② 一文字ずつ消去

連立の不定方程式であっても、連立方程式の解法と同様に、一文字ずつ未知数を減らす。

③ 整数の性質と絞り込み

解が「自然数」や「０以上の整数」であることや倍数に着目することで、解の範囲を絞り込む。

※　整数の性質に関して、詳しくは第５節で扱う。

例2　方程式$2x+3y=17$の解が自然数であるとき、解をすべて求めよ。

yは**自然数**であり、$3y$は17より小さいので、$y=1$、2、3、4、5に絞り込める。偶数と奇数の性質に注意する[4]。偶数と奇数の足し算では、

$$\begin{cases}(\text{偶数})+(\text{偶数})=(\text{偶数})\\(\text{偶数})+(\text{奇数})=(\text{奇数})\\(\text{奇数})+(\text{奇数})=(\text{偶数})\end{cases}$$

である。xは自然数であるから、$2x$は**偶数**であり、17は**奇数**である。したがって、$2x+3y=17$は、(**偶数**)$+3y=$(**奇数**)であり、上の2つ目の式から、$3y$は**奇数**といえる。したがって、$y=1$、3、5に絞り込める。あとは具体的に計算していくと次のようになる。

・$y=1$のとき、$2x+3\times1=17$より$x=7$

・$y=3$のとき、$2x+3\times3=17$より$x=4$

・$y=5$のとき、$2x+3\times5=17$より$x=1$

よって、$2x+3y=17$の自然数の解は$(x,\ y)=$$\underline{(7,\ 1)、(4,\ 3)、(1,\ 5)}$である。

4　偶数と奇数についても、第5節で後述する。

例題 1-2

太郎君は1個90円のリンゴを、花子さんは1個130円のリンゴをそれぞれ何個かずつ買ったところ、2人が支払った代金の合計は8,100円であった。

このとき、花子さんが買ったリンゴの個数として、あり得るのはどれか。

1. 48個
2. 50個
3. 54個
4. 58個
5. 63個

正解へのプロセス

① 文字のおき方と目標の設定

本問では、**未知数は太郎君と花子さんの買ったリンゴの個数**である。そこで、太郎君の購入したリンゴの個数をx［個］、花子さんの購入したリンゴの個数をy［個］とおく。このとき、「花子さんが買ったリンゴの個数として、あり得るものはどれか」とあるので、**求めたいのはy**である。 **目標**

② テーマの把握

条件「支払った代金の合計は8,100円であった」より、$90x + 130y = 8100$［円］…①と立式できる。

未知数（文字）がx、yの2つに対して、方程式が①の1つしか立たず、**未知数の数が方程式の数より多い**ので、「**不定方程式**」**の問題**であることがわかる。

テーマの把握

③ 選択肢の検討と絞り込み

本問の選択肢には、花子さんの購入したリンゴの個数y［個］について、「あり得るもの」が1つだけ含まれている。そこで、**選択肢を1つずつ代入していく**。 **選択肢**

このとき、**xとyが個数（自然数）である**ことより、**倍数に着目することで、解の範囲が絞り込め、代入する選択肢を減らすことができる**。

解説 太郎君の購入したリンゴの個数をx［個］、花子さんの購入したリンゴの個数をy［個］とおく。**目標**

題意より、$90x+130y=8100$［円］…①と立式できる。

係数を小さくするために、①の両辺を10で割ると、次式になる。

$9x+13y=810$ …②

xとyが自然数であることに着目すれば、$9x$は9の倍数であり、$13y$は13の倍数である。

②の各項で共通する**倍数に注目**する。**解法のポイント**

810も9の倍数であることから、移項して右辺に9の倍数を集めると、②は$13y=810-9x=9(90-x)$ …③と変形できる。すると、③の右辺は9の倍数であるから、等号で結ばれた③の左辺も（13の倍数でもあるが）9の倍数となり、yは9の倍数である。

選択肢を見ると、9の倍数でない1、2、4はあり得ない。よって、**3の$y=54$［個］か5の$y=63$［個］に絞り込める**[5]。**選択肢** **解法のポイント**

$y=54$［個］のとき、②に代入すれば$x=12$［個］となり、x、yのいずれも自然数であるが、$y=63$［個］のとき、$x=-1$［個］となり、xが自然数とならず不適である。**場合分け**

正解 3

5 3の$y=54$［個］か5の$y=63$［個］に絞り込めた時点で、どちらか一方の値だけを②に代入すればよい。代入する数値は、計算の簡単な方（一般的には数値の小さい方）を選ぶとよい。

3 不等式

1 不等式の文章題

① 不等式の立式

大小関係を表す条件を式で表す。

❶ 「AはBより大きい（多い）」は「A＝$\boxed{\text{Bより大きな値}}$＞B」と表せる。
したがって、「A＞B」である。　※A＝Bは含まない
❷ 「AはBより小さい（少ない）」は「A＝$\boxed{\text{Bより小さな値}}$＜B」と表せる。
したがって、「A＜B」である。　※A＝Bは含まない
❸ 「AはB以上である」は「A＝$\boxed{\text{B以上の値}}$≧B」と表せる。
したがって、「A≧B」である。　※A＝Bを含む
❹ 「AはB以下である」は「A＝$\boxed{\text{B以下の値}}$≦B」と表せる。
したがって、「A≦B」である。　※A＝Bを含む
❺ 「AはB未満である」は「A＝$\boxed{\text{B未満の値}}$＜B」と表せる。
したがって、「A＜B」である。　※A＝Bを含まない

② 間違いやすい例

間違いやすい例を挙げておく。**文章の意味を理解しながら立式**すること。

❶ 「PはQより5歳年上だ」は「P＝Q＋5［歳］」と表せる。
❷ 「PはQより5歳以上年上だ」は「P＝Q＋$\boxed{\text{5［歳以上］}}$≧Q＋5［歳］」と表せる。
したがって、「P≧Q＋5［歳］」である。
❸ 「PはQより5歳年下だ」は「P＝Q－5［歳］」と表せる。
❹ 「PはQより5歳以上年下だ」は「P＝Q－$\boxed{\text{5［歳以上］}}$≦Q－5［歳］」と表せる。
したがって、「P≦Q－5［歳］」である。

※　「PはQよりn（だけ）大きい」は、不等式ではなく等式「P＝Q＋n」で表せる。
「大きい」や「小さい」という言葉だけで「不等式である」と誤って判定しないようにすること。

2 不等式とその解法のポイント

① 不等式の計算

不等式の計算では、方程式の計算と同様に、移項して「$x \geqq \cdots$」や「$x \leqq \cdots$」の形に変形していく。負の数を掛ける(割る)と不等号の向きが逆になる。

例❶：$3 > -5$の両辺に-1を掛けると$-3 < 5$となる。

例❷：不等式$-2x \geqq 6$を解くとき、両辺に$-\dfrac{1}{2}$を掛ける(−2で割る)と、不等号の向きが変わり、$x \leqq -3$となる。

② 絞り込み

不等式によって範囲を絞り込める。

例❸：$12 < x \leqq 16$を満たす自然数xは$x = 13$、14、15、16である。

3 過不足算(過不足の不等式)

不等式の定番問題の一つであり、「ＡをＢに配分すると、Ａに過剰分や不足分が発生する」という条件から、不等式を立式する問題を「過不足算(過不足の不等式)」という。次の例題で過不足算の問題の型を見ていく。

例題 1-3

ある本数の鉛筆を子どもたちに配ることにした。それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り、４本ずつ配ると15本より多く余った。そこで、６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した。このとき、子どもの人数として正しいのはどれか。

1. 13人
2. 14人
3. 15人
4. 16人
5. 17人

正解へのプロセス

① テーマの把握

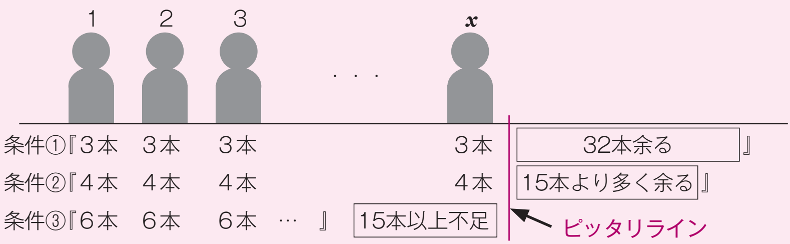
本問では求めるものが子どもの人数なので、**子どもの人数をx［人］とする。** **目標**

「それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り条件①、４本ずつ配ると15本より多く余った条件②。そこで、６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した条件③」という条件から、「**過不足算**」**の問題**であることがわかる。 **テーマの把握**

② 過不足算の図

上の条件①～③を図示すると下図のようになる。 **作図**

このとき、鉛筆の本数の合計に当たる部分を二重かぎ括弧(『　　』)で挟んで表しており、**赤色の線は過剰も不足もなく「ピッタリ」配られたことを表す**（以下「**ピッタリライン**」と呼ぶ）。



③ 過不足算の立式

まずは条件①を立式する。ピッタリラインまで$3\times x$［本］配ったことになるので、余りの32本を合わせれば、鉛筆の本数は$3x+32$［本］となる。

次に条件②を立式する。ピッタリラインまで$4\times x$［本］配ったことになる。また、「15本より多く余った」は「＋ $\boxed{\text{15本より多い本数}}$ 」と表現する。$\boxed{\text{囲み}}$ の部分に入る数字は16、17、…であるので **具体化**、「$\boxed{\text{15本より多い本数}}>15$本」と表せる。したがって、「(鉛筆の本数)$=4x+\boxed{\text{15本より多い本数}}>4x+15$」と表せる。

最後に条件③を立式する。仮にピッタリラインまで配ったとすれば、$6\times x$［本］配ったことになるが、鉛筆の本数の合計は、ピッタリラインより左側にある二重かぎ括弧の右側(』)まで戻すように計算しなければいけない。そこで、**「15本以上不足した」**を「$-\boxed{\text{15本以上の本数}}$」と表現する。$\boxed{\text{囲み}}$ の部分に入る数字を書き出せば、15、16、17、…であるので **具体化** 、**負の数を掛けると不等号の向きが入れ替わることに注意**すれば、「$-\boxed{\text{15本以上の本数}}\leqq -15$本」と表せる。したがって、「(鉛筆の本数)$=6x-\boxed{\text{15本以上の本数}}\leqq 6x-15$」と表せる。

解説

子どもの人数をx［人］、配った鉛筆の本数の合計をy［本］とする。 **目標**

「それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り」とあるので、この条件は$y=3x+32$［本］…①と表せる。

「４本ずつ配ると15本より多く余った」とあるので、この条件は$y=4x+\boxed{\text{15本より多い本数}}>4x+15$、つまり、$y>4x+15$ …②と表せる。

「６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した」とあるので、この条件は$y=6x-\boxed{\text{15本以上の本数}}\leqq 6x-15$、つまり、$y\leqq 6x-15$ …③と表せる。

①を②と③に代入し、**yを消去**すれば、$3x+32>4x+15$ …④および$3x+32\leqq 6x-15$ …⑤となる。④で$32-15>4x-3x$のように移項して整理すれば、$x<17$となり、⑤で$32+15\leqq 6x-3x$ のように移項して整理すれば、$x\geqq\dfrac{47}{3}$となる。まとめると、$\dfrac{47}{3}\leqq x<17$となる。$\dfrac{47}{3}=15.666\cdots$より、$15.666\cdots\leqq x<17$と x の範囲を絞り込め、これを満たす人数(自然数) x は16しかない。 **解法のポイント**

正解 ④

過去問Exercise

問題1

ある家では、ペットボトルの天然水を毎月８本消費する。従来はすべてスーパーで購入していたが、通信販売で６本入りケースを購入すると、１本当たりの価格はスーパーの半額であり、別途、１回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の配送料金がかかることが分かった。また、毎月、通信販売で１ケースを、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり、３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなることが分かった。このとき、スーパーでの１本当たりの価格はいくらか。

国家専門職2010

1. 160円
2. 180円
3. 200円
4. 220円
5. 240円

解説

正解 5

目標は「スーパーでのペットボトルの天然水１本当たりの価格」である。 **目標**

また、「毎月、通信販売で１ケースを、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり条件①」、「３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる条件②」のように、**価格に関する２つの条件がある**。**条件が２つなので、未知数に対応する文字は最低２つ設定できる**。そこで、目標である、「スーパーでのペットボトルの天然水１本当たりの価格」をx［円/本］とおく。このとき、「通信販売で６本入りケースを購入すると、１本当たりの価格はスーパーの半額」になるので、通信販売における天然水１本当たりの価格は$0.5x$［円/本］である。また、通信販売では１回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の配送料金がかかるので、２つ目の未知数に対応する文字として、この配送料金をy［円/回］とおく。**この２文字（xとy）だけで、２つの条件を表すことができる**ので、本問は**「連立方程式」の問題**であることがわかる。

テーマの把握

条件①「毎月、通信販売で１ケース（６本）を、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来（８本すべてをスーパーで購入）より300円安くなり」を式にすれば、

$$(0.5x\times6+y)+x\times2=x\times8-300$$

となり、整理すれば、$y=3x-300$ …①が成り立つ。

条件②「３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる」とあるので、３か月の合算で式を立てれば、条件②は、

$$(0.5x\times6\times2+y)\times2=x\times8\times3-680\times3$$

となり、整理すれば、$y=6x-1020$ …②が成り立つ。

①、②を連立して解くと、**yを消去して**、$3x-300=6x-1020$となり、移項して整理すれば、$x=240$［円/本］となる。

※　$y=420$［円］となるが、求める必要はない。

問題2

両親と３姉妹の５人家族がいる。両親の年齢の和は、現在は３姉妹の年齢の和の３倍であるが、６年後には３姉妹の和の２倍になる。また、４年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和と等しかったとすると、現在の母親・長女及び次女の年齢の和はどれか。

特別区Ⅰ類2006

1. 42
2. 44
3. 46
4. 48
5. 50

解説

正解 5

何年か前や後の年齢に関する文章題であるから、「**年齢算**」の問題である。 **テーマの把握**

条件ア：「両親の年齢の和は、現在は３姉妹の年齢の和の３倍」
条件イ：「両親の年齢の和は、６年後には３姉妹の和の２倍になる」
条件ウ：「４年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和に等しかった」

５人家族各々の年齢を未知数とすると、未知数に対応する文字が５つも必要になってしまう。

そこで、冒頭の２つの条件ア、イより、現在の両親の年齢の和、現在の３姉妹の年齢の和をそれぞれx［歳］、y［歳］とおき、おく文字をなるべく少なくする。

条件アより、$x=3y$ …①と表せる。

条件イより、$x+6\times2=(y+6\times3)\times2$…②と表せる。

未知数がx、yの２つに対し、独立した方程式が２式あるので、解が１組求められる。 **解法のポイント**

①を②に代入してxを**消去**すれば、$3y+12=2y+36$より、移項すれば$y=24$となり、$x=3\times24=72$を得る。ゆえに、x＝「現在の両親の年齢の和」＝72［歳］、y＝「現在の３姉妹の年齢の和」＝24［歳］である。これにより、現在の家族５人の年齢の合計は、$72+24=96$［歳］になる。

ここで、**現在の母親・長女及び次女の年齢の和をz［歳］とする。** **目標**

現在の父親と三女の年齢の和は$96-z$［歳］と表せる。したがって、「４年前の父親と三女の年齢の和」＝$(96-z)-4\times2$［歳］、「４年前の母親・長女及び次女の年齢の和」＝$z-4\times3$［歳］と表せる。

ここで、条件ウより、$(96-z)-4\times2=z-4\times3$が成り立ち、これを解けば、$z=50$［歳］である。

問題3

80円、30円、10円の３種類の切手を、合わせて30枚、金額の合計でちょうど1,640円になるように買いたい。このような買い方に合致する切手の枚数の組合せは何通りか。

国家一般職2012

1. １通り
2. ２通り
3. ３通り
4. ４通り
5. ５通り

解説

正解 ②

買う枚数をそれぞれ、80円切手をx［枚］、30円切手をy［枚］とおく。**目標**「3種類の切手を合わせて30枚」買うので、10円切手を買う枚数は$30-x-y$［枚］である。

金額の合計に関する式を作ると、次のようになる。

$80x+30y+10\times(30-x-y)=1640$［円］

整理すれば、$7x+2y=134$ …①となる。**未知数がx、yの2つに対し、方程式が1つしかないので、「不定方程式」の問題**である。**テーマの把握**

①を倍数がわかりやすいように変形すると、次のようになる。

$7x=2(67-y)$ …②

②より、$67-y$は**0より大きく67より小さい7の倍数**であり、具体的に書き出せば、$67-y=7$、14、21、28、35、42、49、56、63が考えられる。

解法のポイント

「切手は合わせて30枚」であるから、30円切手の枚数であるy［枚］は少なくとも30より小さい数である。そこで、具体的に書き出した上の数のうち、yが30を超えるものを除けば、$67-y$として考えられるのは、42、49、56、63の4つに**絞り込める**。「切手は合わせて30枚」であるから、$x+y$も30より小さい数である。したがって、**この4つの数をそれぞれ②の$(67-y)$に代入して、$x+y$が30より小さい数になる場合を検討**してみる。**具体化** **場合分け**

(1) $67-y=42$のとき、$y=25$で、②より$7x=2\times42$となり、$x=12$である。
このとき、$x+y=37>30$となり、不適である。

(2) $67-y=49$のとき、$y=18$で、②より$7x=2\times49$となり、$x=14$である。
このとき、$x+y=32>30$となり、不適である。

(3) $67-y=56$のとき、$y=11$で、②より$7x=2\times56$となり、$x=16$である。
このとき、$x+y=27<30$となり、10円切手の枚数は$30-x-y=3$［枚］で条件を満たす。

(4) $67-y=63$のとき、$y=4$で、②より$7x=2\times63$となり、$x=18$である。
このとき、$x+y=22<30$となり、10円切手の枚数は$30-x-y=8$［枚］で条件を満たす。

よって、買い方は(3)、(4)の2通りである。

問題4

ある催し物の出席者用に６人掛けの長椅子と４人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した。６人掛けの長椅子だけを使って６人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかった。６人掛けの長椅子に５人ずつ着席させ、４人掛けの長椅子に４人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかった。また、６人掛けの長椅子に６人ずつ着席させ、４人掛けの長椅子に４人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかった。このとき、出席者の人数として、正しいのはどれか。

東京都Ⅰ類2017

1. 106人
2. 108人
3. 110人
4. 112人
5. 114人

解説

正解 2

余り（過剰分）や不足についての条件が与えられるので、本問は「過不足算」の問題である。 **テーマの把握**

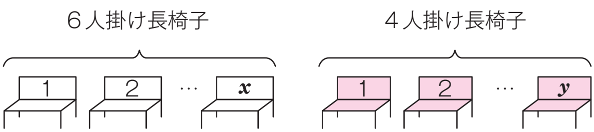
6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子の数をそれぞれx［脚］、y［脚］とし、出席者の人数をz［人］とする。 **目標**

最初の条件「6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した$_{条件①}$」より、$x+y=21$ …①が成り立つ。

条件「6人掛けの長椅子だけを使って6人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかった$_{条件②}$」より、$z=6x+\boxed{36人以上}\geqq 6x+36$、つまり、$z\geqq 6x+36$ …②が成り立つ。

次に、条件「6人掛けの長椅子に5人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかった$_{条件③}$」より、$z=5x+4y+\boxed{12人以上}\geqq 5x+4y+12$、つまり、$z\geqq 5x+4y+12$ …③が成り立つ。

また、最後の条件「6人掛けの長椅子に6人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかった$_{条件④}$」より、出席者の人数は$6x+4y$［人］であることがわかる。つまり、$z=6x+4y$ …④とする。以上の条件を図示すれば、次のようになる。 **作図**



条件②『6人	6人	…	6人	0人	0人	…	0人	$\boxed{36人以上}$』
条件③『5人	5人	…	5人	4人	4人	…	4人	$\boxed{12人以上}$』
条件④『6人	6人	…	6人	4人	4人	…	4人』	ピッタリライン

④を②と③に代入しzを消去すれば、$6x+4y\geqq 6x+36$および$6x+4y\geqq 5x+4y+12$である。これを整理すると、それぞれ、$y\geqq 9$、$x\geqq 12$を得る。この不等式の中で条件①を満たすのは、等号の成立する$x=12$［脚］、$y=9$［脚］のときしかない。

よって、出席者の人数は④より$z=6\times 12+4\times 9=108$［人］である。

★★★

3 比、割合、平均、濃度

この節でも引き続き、数的処理の土台を学習します。とりわけ、割合の応用である「損益算」、「濃度と混合」の問題は、数的処理の定番問題なので、しっかりマスターしましょう。

1 比

1 比とその解法のポイント

いくつかの０でない数や数量の関係を表したものを「比」といい、$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$のように表す。比の等式を「**比例式**」という。

比は、式全体に同じ数を掛けたり、同じ数を割ったりすることで、簡単な比に直すことができる。

例1

3：4は全体を３倍すれば9：12になり、3：4は全体を４倍すれば12：16になる。したがって、次式が成り立つ。

$3:4=9:12=12:16$

逆に、12：16は全体を４で割れば($\frac{1}{4}$倍すれば) 3：4になり、9：12は式全体を３で割れば($\frac{1}{3}$倍すれば) 3：4になる。したがって、次式が成り立つ。

$12:16=9:12=3:4$

当然だが、２つの式は同じである。

① 比の具体化

比が与えられたときは、各数量を比例定数kの一文字だけを使って表すことができる。

例えば、X社への出資額(単位は[万円])として、Ａ社とＢ社とＣ社の出資比率がそれぞれ5：3：2であることがわかっていたとしても、(Ａ社の出資額)＝5[万円]、(Ｂ社の出資額)＝3[万円]、(Ｃ社の出資額)＝2[万円]であるのか、(Ａ社の出資額)＝5000[万円]、(Ｂ社の出資額)＝3000[万円]、(Ｃ社の出資額)＝2000

［万円］であるのかはわからない。そこで、（Ａ社の出資額）＝5k［万円］、（Ｂ社の出資額）＝3k［万円］、（Ｃ社の出資額）＝2k［万円］とおくと、「Ａ社とＢ社とＣ社の出資比率がそれぞれ5：3：2」を具体的な値として表現できる。

なお、（Ａ社の出資額）＝x［万円］、（Ｂ社の出資額）＝y［万円］、（Ｃ社の出資額）＝z［万円］として、$x:y:z=5:3:2$とすることもできるが、この場合、文字はx、y、zの３つが必要になる。一方、上記のk倍する方法では文字をkの１つで済ませることができ、**文字を少なくすることができる**。

② ２数の比例式の変形

例えば、20：15＝4：3であるが、比の外側の２数(20と３)の積は20×3＝60であり、内側の２数(15と４)の積は15×4＝60となり、２つの積の値が一致する。このように、**２数の比例式では、「(外項の積)＝(内項の積)」が成り立つ**。つまり、$a:b=c:d$では$a\times d=b\times c$が成り立つ。このようにして、比例式を方程式に変形することができる。

例2

$x:4=5:9$を満たすxは(外項の積)＝(内項の積)より、$x\times9=4\times5$と変形することで、xの１次方程式に変形できる。これを解けば、$x=\dfrac{20}{9}$となる。

2 連　比

３つ以上の数の比を、１つの比例式にまとめて表したものを「連比(れんぴ)」という。

例3

Ａ：Ｂ＝２：３、Ｂ：Ｃ＝２：３のとき、Ａ：Ｂ：Ｃをまとめて、簡単な比に直せばどうなるだろうか。

登場する文字どうしを比較できるように、両方の比の式に登場する文字の数値を揃える。そこで、次のように、**両方の比の式に登場する文字と、これに対応する数値が上下に揃うように並べる**。

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & & = 2 & : & \boxed{3} & & \\ & & B & : & C = & & \boxed{2} & : & 3 \end{array}$$

Ｂが両方の比の式に登場する。Ｂに対応する数値が上下それぞれで、３と２であ

るから、**最小公倍数に統一してA、B、Cを比較できるようにする**。そのために、上の式の右辺を２倍、下の式の右辺を３倍すれば、

$$\begin{array}{rcl} A : B & = 4 : & \boxed{6} \\ B : C = & & \boxed{6} : 9 \end{array}$$

のように、**Bを「6」に統一**できる。まとめると、A：B：C＝<u>4：6：9</u>となる。

※　最小公倍数に関して、詳しくは第５節で扱う。

3　逆　比

逆数の比を「**逆比**」という。

① ２数の逆比

$a:b$の逆比は$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$である。$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$にabを掛ければ、$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$となり、**２数の逆比は比の並びが逆になる**。

② ３数の逆比

$a:b:c$の逆比は$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$である。$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$に$abc$を掛ければ、$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ca:ab$となり、**３数の逆比の場合は比の並びが逆にはならない**。

4　分数式と比例式

例えば、$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$のとき、$a=3k$、$b=2k$（$k\neq0$）[1]と表せる。

したがって、

$a:b=3k:2k=3:2$

である。

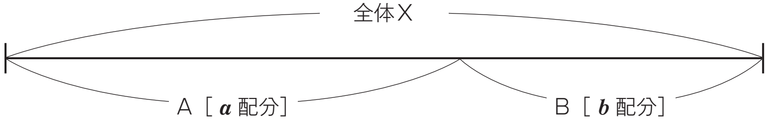
このように、**分数式は比例式に直すことができる**。

1　0で割ることはできないため、分数の分母は0でない。したがって、$\frac{b}{a}$の分母aは0でない。これより$a=3k$のkも0でない。

5 比例配分

全体XをAとBにそれぞれ$a:b$に比例配分するときは、下図のように**線分図を描く**とわかり易い。

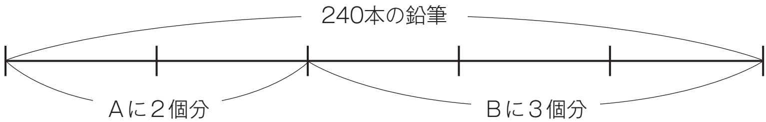
比例配分には2つの解法がある。次の例で具体的に確認していきたい。



例4

240本の鉛筆をAとBにそれぞれ2：3に比例配分する。このとき、A、Bには何本ずつ配分すればよいだろうか。

線分図を描くと次のようになる。



［解法1］

次のように解く。**A＝2k［本］、B＝3k［本］と具体化**して、240＝2k＋3kより、5k＝240からk＝48を得る。よって、A＝2×48＝<u>96［本］</u>、B＝3×48＝<u>144［本］</u>ずつ配分すればよい。

［解法2］

次のように解く。**240本を（2＋3＝）5等分する**と、1等分あたり240÷5＝48［本］である。これを**Aには2個分、Bには3個分配分**して、A＝2×48＝<u>96［本］</u>、B＝3×48＝<u>144［本］</u>である。

例題 1-4

兄と弟の貯金額の比は5：3であった。ところが、兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金したので、兄と弟の貯金額の比は3：4になった。兄のはじめの貯金額として、正しいのはどれか。

1. 10,000円
2. 12,500円
3. 15,000円
4. 17,500円
5. 20,000円

正解へのプロセス

貯金額の比は、はじめは兄：弟＝5：3であり、おわりは兄：弟＝3：4になっている。条件は2つあり、兄のはじめの貯金額が問われているので、はじめの兄の貯金額をx［円］、はじめの弟の貯金額をy［円］とおいて、連立方程式で解くこともできる。目標 **しかし、本問は「比」の問題であるから、兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ5k［円］、3k［円］とおく**とよい。解法のポイント この方が、文字が少なくなり計算も簡単になる。

解説

兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ**5k［円］、3k［円］とおく。**

目標 解法のポイント

兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金して、兄と弟の貯金額の比が3：4になったので、次の式が成り立つ。

$$(5k-7500):(3k+1000)=3:4$$

(外項の積)＝(内項の積) より、$4\times(5k-7500)=3\times(3k+1000)$ となる。

解法のポイント

これを解けば、$k=3000$を得る。よって、兄のはじめの貯金額は$5\times3000=15000$［円］である。

正解 3

2 割　合

1 割合の解法のポイント

基準となる量に対する、ある量の比率を「**割合**」という。小数、分数、比、百分率、歩合などを用いて表す。

① 基　準

割合を考える上で最も大事なのは、「**基準は何か？**」である。

基準に具体的な値が与えられている場合を除けば、**(基準) ＝ 1 として割合を分数(や小数)で表現することが多いが、状況に応じて(基準) ＝100（100%)で表す**こともある。

分数・小数	1	$\frac{1}{10}=0.1$	$\frac{1}{100}=0.01$	$\frac{1}{1000}=0.001$
百分率[%]	100%	10%	1 %	0.1%
歩合	10割	1 割	1 分(ぶ)	1 厘(りん)

② 線分図

割合を図示するときは、**線分図を描く**とよい(下図)。

2 割合の様々な表現

① 割合の基本表現

「Aに対するBの割合[%]」=「BのAに対する割合[%]」$=\dfrac{B}{A}\times 100$

※　「Aに対する」とある場合、Aが「基準=分母」である。

② 合格率、競争率

$(\text{合格率}[\%]) = \dfrac{(\text{合格者数})}{(\text{受験者数})} \times 100$、$(\text{競争率}[\text{倍}]) = \dfrac{(\text{受験者数})}{(\text{合格者数})}$で求められる。

3 損益算（売買算）

割合にも様々な文章題がある。とりわけ、「**損益算**（**売買算**）」と呼ばれる、売買(利益や損失)に関する文章題は公務員試験をはじめ、様々な試験に登場する重要なテーマである。次の表にある用語を理解しておきたい。

損益算(売買算)に関する用語

価格	①原価	仕入れの価格
	②定価	はじめに付けた価格
	③販売価格(売価)	定価や割引価格など、売るときの価格の総称
売上		(販売価格)×(販売個数)の総和
総利益(利益合計)		(総利益)=(売上)−(原価合計)=(利益小計)の総和

4 増　減

次の例で具体的に見ていくが、「～%増し(～%増)」、「～割引き(～割減)」と増減の付いていない「～%」、「～割」を読み違えないようにする。

例5　次の[　　]にあてはまる数字はいくらか。

❶ 500円の3割**増し**は[ア]円である。

❷ 7,200円の25%**引き**は[イ]円である。

❸ [ウ]円の5割**増し**は6,000円である。

❶ 500円が基準である。

500円の3割は、500×3割＝500×0.3＝150［円］に相当する。したがって、[ア]には500＋150＝<u>650［円］</u>が入る。なお、これを1つの式にすると、500×（1＋0.3）＝500×1.3＝<u>650［円］</u>である。

❷ 7,200円が基準である。

7,200円の25%は、7,200円の$\frac{1}{4}$であり、4で割った1,800円が相当する。したがって、[イ]には、7,200円から1,800円を引いた<u>5,400円</u>が入る。あるいは、7,200円の25%引きは、7,200円の75%になるから、これを1つの式にすると、$7200\times(1-0.25)=7200\times0.75=7200\times\frac{3}{4}=$<u>5400［円］</u>である。

❸ [ウ]円が基準である。

[ウ]$=x$［円］とすれば、x円の5割増しは6,000円であるから、$x\times(1+0.5)=6000$［円］である。これを解けば、$x=6000\div1.5=6000\div\frac{3}{2}=6000\times\frac{2}{3}=$<u>4000［円］</u>である。

例題 1-5

7,200円で品物をいくつか仕入れ、１個あたり600円で全部売って、仕入れ総額の25％の利益を見込んだ。しかし、実際には何個かを600円で売り、残りを５％値引きして売ったため、全体で仕入れ総額の20％の利益しか得られなかった。このとき、600円で売った品物の個数として、正しいのはどれか。

1. １個
2. ２個
3. ３個
4. ４個
5. ５個

正解へのプロセス

❶ 損益算では、**利益は「プラス（＋）」で、損失は「マイナス（－）」で数値化する。**

❷ 損益算は割合に関する問題の一種である。したがって、「５％値引き」などの増減に関する言葉が出てきたときは、「何に対する割合なのか？」を、つまり、**割合の基準が何かを考える**ようにしたい。 **基準**

「値引き」は値段から引くことであるから、本問でははじめに付けた値段（定価）である600円から５％引くと読み取る。

❸ **損益算では、登場する条件や数値が多いので、必要に応じて線分図や表などを作成して整理をするとよい。** **表**

解説

600円で売れた品物の個数をx［個］とする。 **目標**

25％の利益を見込んで１個あたり定価600円で売ったので、（原価）×（1＋0.25）＝（定価）より、１個あたりの原価は、**（原価）＝600÷1.25＝600÷$\frac{5}{4}$＝600×$\frac{4}{5}$＝480［円］**である。また、仕入れ総額が7,200円であるので、仕入れた個数は7200÷480＝15［個］である。

定価600円の５％引きの割引価格は600－600×５％＝600－600×0.05＝570［円］であり、**仕入れ総額の20％の利益とは7200×20％＝7200×0.20＝1440［円］**である。

以上より、１個あたりの利益は、定価の600円のときは$600-480=120$［円］、割引価格の570円のときは$570-480=90$［円］だけ生じる。これらを表に整理すると、下のようになる。表

		価格	個数	利益	利益小計
原価		480円/個	15個	0円/個	
売価	定価	600円/個	x[個]	120円/個	$120\times x$[円]
	割引価格	570円/個	$15-x$[個]	90円/個	$90\times(15-x)$[円]

条件より、**総利益について立式**すれば、$120\times x+90\times(15-x)=1440$［円］となり、これを解けば$x=3$［個］である。

正解 3

3 平　均

1 平均値

数量の凹凸を「平らに均(なら)し」、不揃いでないようにすることを「平均する(平均を取る)」といい、その値を平均値という。

① 平均値と合計

平均値は数量の合計(総和)を均等に分けることで定められる。

平均値と合計

【平均の定義】

$$(\text{平均値})=\frac{(\text{数量の合計})}{(\text{個数}(\text{人数}))}$$

これを変形すれば、

【平均と合計の公式】

$$(\text{数量の合計})=(\text{平均値})\times(\text{個数}(\text{人数}))$$

となる。

② 仮平均

平均値を計算するとき、数量の合計が大きくなる場合がある。このような**大きな数量の合計を求めることを回避するために、仮の平均値(仮平均)を設定して、真の平均値を計算する方法を「仮平均法」**という。

仮平均法を用いるとき、真の平均値は次のように計算できる。

仮平均の公式

$$(\text{真の平均値})=(\text{仮平均})+\frac{\{(\text{各数量})-(\text{仮平均})\}\text{の合計}}{\text{個数}}$$

$$=(\text{仮平均})+[\{(\text{各数量})-(\text{仮平均})\}\text{の平均}]$$

簡単に書き直せば、

$$(\text{真の平均値})=(\text{仮平均})+(\text{仮平均との差の平均})$$

※　ただし、ここでの(差の平均)の「差」は符号(＋、－)を含む量である。次の例の[解法2]を参照してもらいたい。

例6

A君がこれまでに受けた8回のテストの結果は、以下の表の通りであった。この後2回テストを受けて、全10回の平均点を80点としたい。このとき、残り2回で取らなくてはいけない平均得点はいくらか。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?

[解法1]　「平均の定義」や「平均と合計の公式」を用いて計算する

10回の平均点を80点にしたいので、10回の合計点が何点になればよいかを考える。

(合計点)＝(平均点)×(回数)で求められるので、全10回で、$80\times10=800$［点］取ればよいことがわかる。8回目までの合計点が$75+86+73+67+92+78+76+85=632$［点］であるので、残り2回で$800-632=168$［点］取ればよい。

したがって、残り2回の平均点は、$(平均値)=\dfrac{(合計)}{(回数)}$より、$(平均点)=\dfrac{168}{2}=\underline{84}$ [点]となる。

[解法2]　仮平均法を用いて計算する

仮平均を80点と設定すると、(仮平均との差)＝(各数量)－(仮平均)は次表のようになる。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?
仮平均との差	−5	+6	−7	−13	+12	−2	−4	+5		

したがって、1回目から8回目までの{(仮平均との差)の合計}は、$-5+6-7-13+12-2-4+5=-8$［点］となる。なお、(仮平均との差)や{(仮平均との差)の合計}にはマイナスの場合がありうることに注意してもらいたい。

(真の平均値)＝(仮平均)＋(仮平均との差の平均)であり、ここでは、(真の平均値)＝(仮平均)＝80［点］であるので、(仮平均との差の平均)＝0［点］になればよい。

$$(\text{仮平均との差の平均}) = \frac{\{(\text{各数量}) - (\text{仮平均})\}\text{の合計}}{\text{回数}} =$$

$\dfrac{-8[\text{点}] + (9\text{回目の点差}) + (10\text{回目の点差})}{10} = 0[\text{点}]$より、(9回目の点差)＋(10回目の点差)＝8［点］であればよく、9回目と10回目の平均で$\dfrac{8}{2}=4$［点］多く取ればよいことになる。よって、残り2回で平均80＋4＝84［点］取ればよい。

③ 平均値の異なる集団の全体の平均値

平均値の異なる2つの集団があり、2つの集団を合わせた「全体の平均値」を求めるときは、各集団の合計を求めることで、全体の合計や全体の平均値が求められる。

例7

あるテストについて、下表のように2クラスのデータが与えられたとき、全体の平均点はいくらか。

あるテストの2クラスのデータ

	Aクラス	Bクラス	全体
平均点	75点	80点	?
人数	20人	30人	50人
合計	1500点	2400点	3900点

このとき、全体の平均点$=\dfrac{75\times20+80\times30}{20+30}=\dfrac{3900}{50}=78$［点］となる。

④ 平均値とバランス

何人かで食事に行って割り勘するときの金額は平均額である。割り勘をする理由は「**バランスを取る**」ことに他ならないが、このことから推測できるように、

(平均値)＝(バランスする位置)

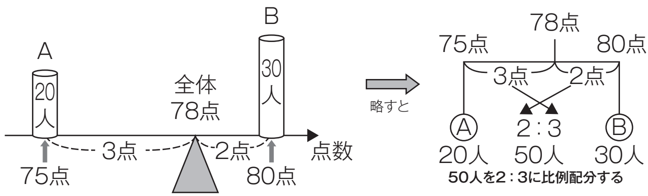
という見方ができ、これが次に述べる天秤法の原理である。

2 天秤法と天秤図

前述のとおり、「**平均を取る**」**とは**「**バランスを取る**」**こと**である。バランスをイメージする方法として、シーソーや天秤を描くとわかりやすい。**全体の平均値をバランスする位置として図示したものが**「**天秤図**」である。

例7 に出てきた表をグラフにすると次の図である。

図では、人数が「シーソー・天秤の腕に乗るおもりの重さ」に、点差が「腕の長さ」に、全体の平均点が「平衡点(バランスする位置＝重心)」に対応している。この考え方を「**天秤法**」という。



※　「ぶら下がりのおもり」で描いた**右図は左図のシーソーの図の略図**である。

この図からもわかるように、A、Bの各クラス平均点と全体の平均点までの点差(３点および２点)が、クラスの人数(20人および30人)の**逆比**になっている。つまり、３点：２点＝30人：20人が成り立っている。

これは、一般の場合でも成り立ち、天秤法では各集団の平均値と集団全体の平均値の差を「腕の長さ」とすれば、

(Aの腕の長さ)：(Bの腕の長さ)＝(Bの要素の数)：(Aの要素の数)

とまとめられる。

4 濃度と混合

1 食塩水

食塩水とは食塩＋水であり[2]、食塩水の濃度や食塩の重さについての問題が公務員試験では出題される。

① 食塩水の濃度

食塩水の濃度とは、**食塩水全体に占める食塩の割合［%］**である（次の図をイメージ）。よって、**濃度の基準は食塩水全体**である。

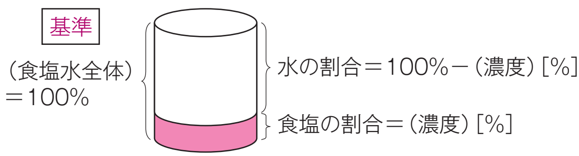
食塩水の濃度、食塩の重さ

【食塩水の濃度の定義】

$$（食塩水の濃度［\%］）＝\frac{（食塩の重さ［g］）}{（食塩水の重さ［g］）}\times 100［\%］$$

【食塩の重さの公式】

$$（食塩の重さ［g］）＝（食塩水の重さ［g］）\times\frac{（食塩水の濃度［\%］）}{100［\%］}$$



② 条件の読み替え

以下のように問題の条件を読み替えると解きやすくなる。

❶ 「食塩を加える」＝「濃度100%の食塩水を混ぜる」
❷ 「水を加える」＝「濃度０%の食塩水を混ぜる」
❸ 「蒸発させる」＝「水のみを抜く」＝「濃度０%の食塩水を引く」

---

2 砂糖水も，砂糖水＝砂糖＋水である。

2 食塩水の混合と天秤法

２つの食塩水を混合すると、**混合後の濃度は均一化される**。したがって、

(混合後の濃度) = (平均値) = (バランスする位置)

として天秤図で図示できる。これを表したものが次の図である。

食塩水の混合と天秤法

【天秤法】

２つの食塩水A、Bを混ぜるとき、**混合前の食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係**になる。つまり、

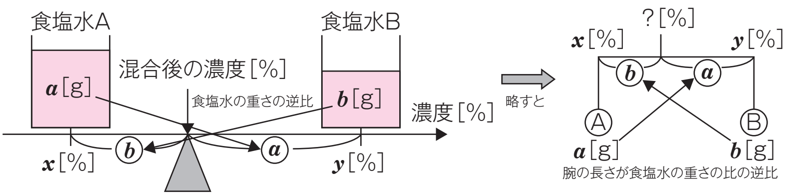
（Aの混合前後の濃度変化）：（Bの混合前後の濃度変化）

＝（Bの重さ）：（Aの重さ）

が成り立つ[3]。

【天秤図】

天秤法をもとに図を描いたものが天秤図である。



3　この式は、(混合後の濃度 [%]) ＝ $\dfrac{(\text{Aの重さ})\times(\text{Aの濃度}[\%])+(\text{Bの重さ})\times(\text{Bの濃度}[\%])}{(\text{Aの重さ})+(\text{Bの重さ})}$ を変形することで得られる。

例8　８％の食塩水200gと14％の食塩水50gを混ぜ合わせると何％の食塩水ができるか。

［解法１］

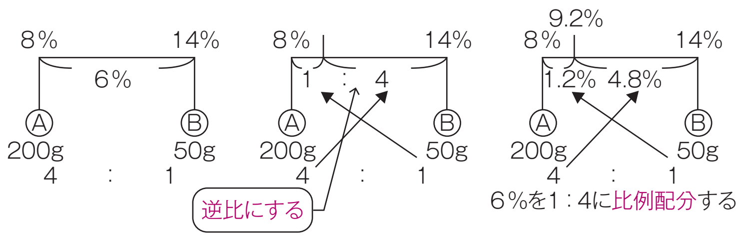
８％の食塩水と14％の食塩水をそれぞれA、Bとして、**表に書いて整理**すると以下のようになる。

	A	B	全体
濃度[%]	８％	14％	？
食塩水[g]	200g	50g	200＋50＝250［g］
食塩[g]	200×0.08＝16［g］	50×0.14＝7［g］	16＋7＝23［g］

(混合後の濃度) $= \dfrac{23}{250} \times 100 = \underline{9.2\ [\%]}$ となる。

［解法２］

天秤法を用いる。**食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係にある**ので、(食塩水Aの重さ)：(食塩水Bの重さ)＝200g：50g＝4：1より、(Aの混合前後の濃度変化)：(Bの混合前後の濃度変化)＝1：4となる。混合前のAとBの濃度差14－8＝6［%］を1：4に**比例配分する**と、６％を1＋4＝5［等分］すれば、1等分あたり6÷5＝1.2［%］であるから、1：4＝1.2×1：1.2×4＝1.2%：4.8%となる。混合後の食塩水の濃度は8＋1.2＝<u>9.2［%］</u>になる。



例題 1-6

3％の食塩水と8％の食塩水を混ぜ合わせ、6％の食塩水を500g作りたい。このとき、3％の食塩水は何g混ぜればよいか。

1. 180g
2. 200g
3. 250g
4. 270g
5. 300g

正解へのプロセス

食塩水の混合に関する問題の解法は大きく2つある。

［解法1］　混合後の食塩の重さの合計と食塩水の重さの合計に着目して解く。このときは表を書いて考えるとわかり易い。 表

［解法2］　天秤法で解く。2つの食塩水を混合すると、混合後の濃度は均一化される。（混合後の濃度）＝（平均値）＝（バランスする位置）より、天秤図を描いて考えるとわかり易い。 作図

解説

［解法1］　食塩の重さの合計と食塩水の重さの合計に着目して解く

3％の食塩水と8％の食塩水をそれぞれA、Bとして、A、Bの重さをそれぞれx［g］、y［g］とおく。 目標

混合前後の濃度、食塩水の重さ、食塩の重さを以下のような表に整理する。 表

	A	B	全体
濃度［%］	3％	8％	6％
食塩水［g］	？＝x［g］	y［g］	500g
食塩［g］	$x\times0.03$［g］	$y\times0.08$［g］	$500\times0.06=30$［g］

食塩水の重さの合計について、$x+y=500$［g］、食塩の重さの合計について、$0.03x+0.08y=30$［g］が成り立ち、2つの式を連立方程式として解けば、$x=200$［g］、$y=300$［g］である。

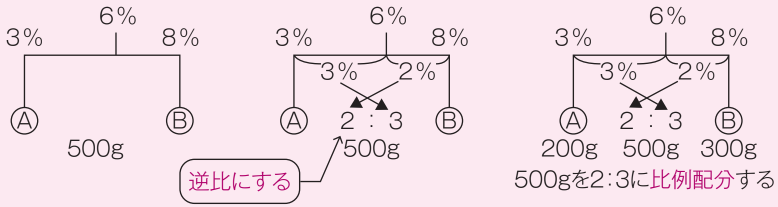
［解法２］　天秤法で解く

濃度変化が３％から６％の３％と、８％から６％の２％であるので、濃度変化の比はＡ：Ｂ＝３％：２％＝3：2である。

食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係にあるので、(Ａの重さ)：(Ｂの重さ)＝2：3である。 **解法のポイント**

これをもとに天秤図を描いていけば、左から右の順に**作図**できる。 **作図**

食塩水の重さは両方合わせて500gであるから、500gを2：3に**比例配分**する。500gを2＋3＝5［等分］すれば、1等分あたり500÷(2＋3)＝100［g］であるから、2：3＝200g：300gに比例配分すればよい。したがって、３％の食塩水が200g、８％の食塩水が300gである。



正解　❷

過去問Exercise

問題1

　ある高校で一年生全体に対して、現時点で考えている将来の進路について「進学希望」、「就職希望」、「未定」のいずれかを選択するようにアンケートを取ったところ、ア、イ、ウの結果を得た。「未定」を選択した生徒は何人か。

国家専門職2001

ア　一年生全体の生徒数と、「進学希望」と「就職希望」を選択した生徒数の合計の比は、5：4である。

イ　「就職希望」を選択した生徒数と一年生全体の生徒数の比は、9：50である。

ウ　「進学希望」を選択した生徒数は248人である。

1. 50人
2. 60人
3. 70人
4. 80人
5. 90人

解説

正解 4

全体はある高校の一年生であり、一年生を「進学希望」、「就職希望」、「未定」の３つに分けて、人数比を考える。３つの比が登場するので、本問は「**連比**」**の問題**である。**テーマの把握**

未定を選択した生徒数をx［人］とおく。**目標**

条件アとイの比の中で、共通している項目である「一年生全体」を利用して作図し、連比を作ると、次のようになる。

（就職希望者数）		（一年生全体の生徒数）		（進学希望者数）＋（就職希望者数）	
		5	:	4	
9	:	50			⇦ 10倍する
9	:	50	:	40	

（一年生全体の生徒数）＝（進学希望者数）＋（就職希望者数）＋（未定者数）であり、（一年生全体の生徒数）の比の値は50、（進学希望者数）＋（就職希望者数）の比の値は40であるから、（未定者数）の比の値は50－40＝10であり、（就職希望者数）の比の値が９であることより、（進学希望者数）の比の値は40－9＝31である[4]。

よって、条件ウより次の式が成り立つ。

$10:31=x:248$

（内項の積）＝（外項の積）より、**解法のポイント** $31\times x=10\times 248$となり、この式を解くと、$x=80$［人］である。

4　あくまで、比の値であり、具体的な値（人数）ではない。

問題2

　ある商品を120個仕入れ、原価に対し、５割の利益を上乗せして定価とし、販売を始めた。ちょうど半数が売れた時点で、売れ残りが生じると思われたので、定価の１割引きにして販売した。販売終了時刻が近づき、それでも売れ残りそうであったので、最後は定価の半額にして販売したところ、売り切れた。全体としては、原価に対し１割５分の利益を得た。このとき、定価の１割引きで売れた商品は何個か。

国家一般職2010

1. ５個
2. 15個
3. 25個
4. 45個
5. 55個

解説

正解 1

「損益算」の問題である。 テーマの把握

金額（円など）に関する数値が一切出てきていないので、商品1個あたりの原価を100円としても一般性を失わない[5]。 具体化

また、1割引きで売れた商品の個数をx［個］とする。 目標

「原価（100円）に対し、5割の利益を上乗せ」したので、1個あたり$100 \times 0.5 = 50$［円］の利益を上乗せして、定価150円で売り始めたことがわかる。半数である60個が売れた時点で、定価分では合計で$50 \times 60 = 3000$［円］だけの利益を得る。その後、定価150円の1割引きである$150 \times 0.1 = 15$［円］引きで販売したので、この販売価格は$150 - 15 = 135$［円］となり、1個あたりの利益は$135 - 100 = 35$［円］になる。これがx［個］だけ売れたので、135円で売れた商品からは合計で$35 \times x$［円］の利益を得る。残りの$60 - x$［個］の商品の販売価格は定価の半額である75円で売ったのだから、$75 - 100 = -25$［円］より、1個あたり25円の損失が発生する。したがって、75円で売れた商品からは合計で$25 \times (60 - x)$［円］の損失が発生する。

		価格	個数	利益	利益小計
原価		100円/個	120個		
売価	定価	150円/個	60個	50円/個	3000円
	1割引き	135円/個	x［個］	35円/個	$35 \times x$［円］
	半額	75円/個	$60 - x$［個］	−25円/個	$-25 \times (60 - x)$［円］

よって、一連の販売での総利益は$3000 + 35x - 25 \times (60 - x)$［円］である。全体で1割5分の利益が出ているので、$3000 + 35x - 25 \times (60 - x) = 100 \times 120 \times 0.15$が成り立つ。これを整理すれば、$60x = 300$となり、$x = 5$［個］である。

5 「一般性を失わない」とは数学などの論述解答で登場する表現であり、「条件を付加しても、解答には影響しない」という意味である。

問題3

Ａ課の職員27人が昨年１年間に取得した有給休暇取得日数の平均は、Ｂ課の職員15人のそれよりも1.4日多く、Ａ課とＢ課を合わせた平均取得日数は16.0日であった。Ａ課の職員が昨年１年間に取得した有給休暇の平均取得日数はどれか。

警視庁Ⅰ類2008

1. 16.2日
2. 16.3日
3. 16.4日
4. 16.5日
5. 16.6日

解説

正解 4

「平均」の問題である。 テーマの把握

[解法１]　合計に着目して、方程式で解く

求めたいＡ課の有給休暇平均取得日数をx［日/人］とおくと、Ｂ課のそれはx－1.4［日/人］と表せる。 目標

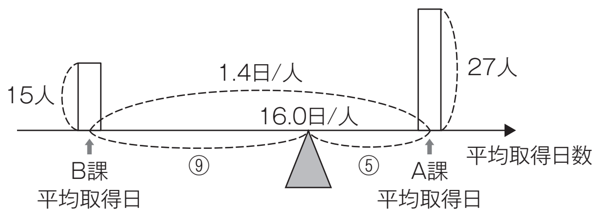
Ａ課とＢ課を合わせた全体の人数は27＋15＝42［人］である。これをもとに表を書いて考えれば、下表のようになる。 表

	Ａ課	Ｂ課	全体（Ａ＋Ｂ）
平均取得日数［日/人］	x	$x-1.4$	16.0
人数［人］	27	15	42
合計［日］	$x\times27$	$(x-1.4)\times15$	16.0×42＝672

合計に着目すれば、$27x+15(x-1.4)=672$となり、これを解けば、$x=16.5$［日/人］となる。

[解法２]　天秤法で解く

Ａ課とＢ課の人数の比は27：15＝9：５である。これをもとに天秤図を描くと、下図のようになる。 作図



Ａ課とＢ課の平均取得日数の差である1.4日/人を（⑨＋⑤＝）14等分すれば、一等分あたり、1.4÷14＝0.1［日/人］となるので、⑤に対応する数値は0.1×5＝0.5［日/人］となる。

ゆえに、Ａ課の平均取得日数は16.0＋0.5＝16.5［日/人］となる。

問題4

　甲、乙２種類の食塩水がある。甲３、乙１の割合で混ぜ合わせると濃度５％、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせると濃度７％の食塩水が得られる。このとき、甲の食塩水の濃度に最も近いものは、次のうちどれか。

裁判所一般職2003

1. 2.6%
2. 3.6%
3. 4.6%
4. 5.6%
5. 6.6%

解説

正解 ②

「**濃度と混合**」の問題である。**テーマの把握**

甲の食塩水の濃度をx［%］、乙の食塩水の濃度をy［%］とする。**目標**

［解法１］　食塩の重さに着目して解く

甲３、乙１の割合で混ぜ合わせるとき、**実際の重さの数値が書かれていないので、甲を300［g］、乙を100［g］と仮定しても、一般性を失わない**。このとき、**表を書いて**考えれば、以下のようになる。**表**

	甲	乙	全体
濃度［%］	x［%］	y［%］	5%
食塩水［g］	300g	100g	300＋100＝400［g］
食塩［g］	$300\times\frac{x}{100}=3x$［g］	$100\times\frac{y}{100}=y$［g］	400×0.05＝20［g］

食塩の合計に着目すれば、$3x+y=20$［g］…①が成り立つ。

同様に、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせるとき、甲を100［g］、乙を300［g］とすれば、以下のようになる。

	甲	乙	全体
濃度［%］	x［%］	y［%］	7%
食塩水［g］	100g	300g	100＋300＝400［g］
食塩［g］	$100\times\frac{x}{100}=x$［g］	$300\times\frac{y}{100}=3y$［g］	400×0.07＝28［g］

食塩の合計に着目すれば、$x+3y=28$［g］…②が成り立つ。①、②を連立すれば、$x=4$［%］、$y=8$［%］を得る。

［解法２］　天秤法で解く

甲３、乙１の割合で混ぜ合わせると濃度５％、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせると濃度７％の食塩水ができるので、食塩水の濃度は$x<y$である。天秤図を描けば、**作図** **（混合による甲の濃度変化）：（混合による乙の濃度変化）＝（乙の重さ）：（甲の重さ）**であるので、$(5-x):(y-5)=1:3$、$(7-x):(y-7)=3:1$の２つの比例式が成り立つ。**（外項の積）＝（内項の積）**より、$3(5-x)=y-5$と$7-x=3(y-7)$となり、この連立方程式を解けば、$x=4$［%］、$y=8$［%］を得る。

ゆえに、甲の食塩水の濃度$x=4$［%］に**最も近いもの**は②の3.6%である。