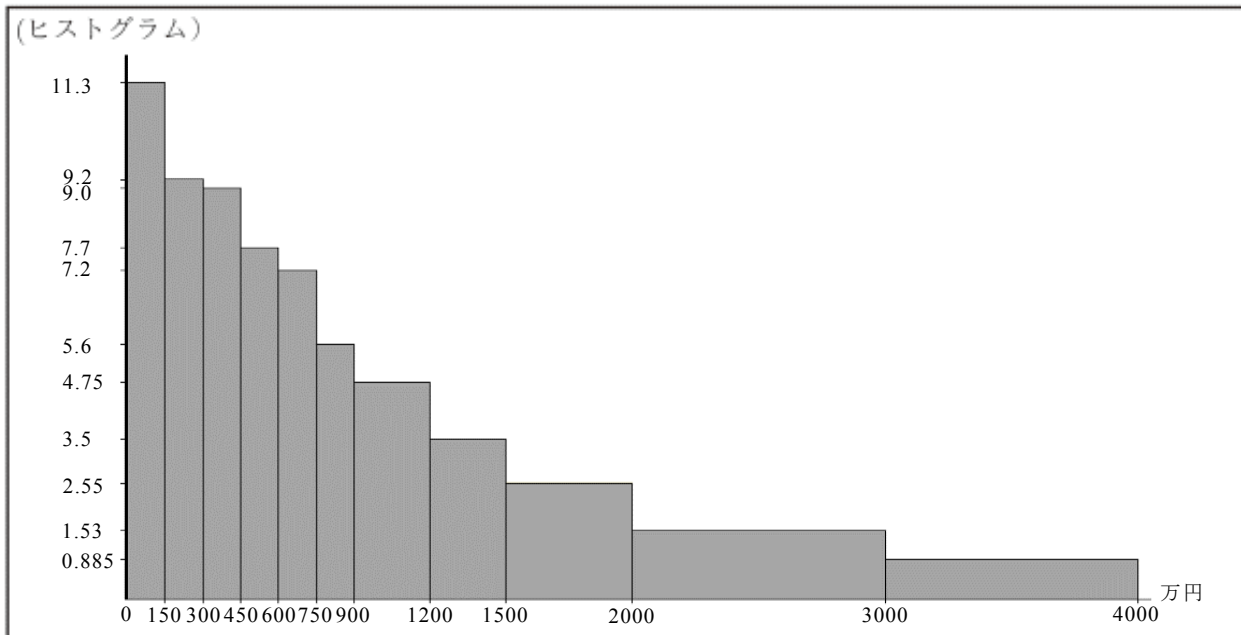


# 第7問 答案用紙<1>

## (統計学)

### 問題1

(1)



(2) 高さ =  (小数点以下2ケタ)

幅 =  (整数)

(3) 貯蓄現在高の平均の近似値 =  万円 (整数)

(4) 小さい方から20%の階級番号 =

大きい方から20%の階級番号 =

# 第7問 答案用紙<2> (統計学)

## 問題2

(1)

| ア   | イ   |
|-----|-----|
| (b) | (f) |

(2)

| ウ | エ    | オ | カ    |
|---|------|---|------|
| 7 | 51.5 | 1 | 36.6 |

| キ  | ク    |
|----|------|
| 21 | 11.1 |

(エ, カ, クについては小数点以下1ケタ)

(3) 1)

(説明)

5ヵ月移動平均法では、平均を取る長さ(5ヵ月)が季節変動の周期である12ヵ月よりも短いため、季節変動が残存してしまう。

2)

993

×10億円(整数)

3)

-0.17

×10億円(小数点以下2ケタ)

# 第7問 答案用紙<3> (統計学)

## 問題3

(1)  $\Pr(X=1) =$   (分数)

$\Pr(X=2) =$   (分数)

$\Pr(X=3) =$   (分数)

(2)  $V(X) =$   (分数)

(3)

| ア             | イ             | ウ             | エ |
|---------------|---------------|---------------|---|
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |

(4)

| オ | カ             |
|---|---------------|
| 0 | $\frac{1}{4}$ |

(5)  $E(Z|Y=2) =$   (分数)

$V(Z|Y=2) =$   (分数)

【解答への道】

I 合格ライン

問題 1

記述統計の分野から、相対度数分布表とヒストグラムに関する出題である。基本的な計算問題であり、合格ラインは6～7割程度と思われる。

問題 2

記述統計の分野から、季節指数、変化率の計算、移動平均の計算に関する出題である。標準的な出題ではあるが、計算量が多く煩雑であるため、正答しにくかったと思われる。5割程度の正答率が得られれば十分であろうと思われる。

問題 3

確率の分野からの、2つの確率変数に関する標準的な計算問題である。典型的な問題であり、合格ラインは7割程度と思われる。

全体として、第7問の合格ラインは、素点で60%程度と考えられる。

II 答練との対応関係

問題 1

基礎答練第1回 第1問 問題 1

応用答練第1回 第1問 問題 1

直前答練第1回 第1問 問題 1

直前答練第3回 第1問 問題 1

直前答練第4回 第1問 問題 1

公開模試第2回 第7問 問題 1

問題 2

直前答練第4回 第1問 問題 1

問題 3

基礎答練第1回 第1問 問題 3

基礎答練第3回 第1問 問題 1

応用答練第1回 第1問 問題 3

直前答練第3回 第1問 問題 3

問題 1

- (1) ヒストグラム（柱状グラフ）の作成に際して、長方形（柱）の高さは、それぞれの階級に対して、階級幅を横幅とし、長方形の面積が(相対)度数と比例するように定める必要がある。

ここで、第1階級から第6階級(および第11階級)の長方形の高さは、問題文で与えられている。第7階級以降は、階級幅が第1階級から第6階級までの値(150)と異なるため、以下のような調整を行う。

$$\text{第7階級} : 9.5 \times \frac{150}{300} = 4.75$$

$$\text{第8階級} : 7.0 \times \frac{150}{300} = 3.5$$

$$\text{第9階級} : 8.5 \times \frac{150}{500} = 2.55$$

$$\text{第10階級} : 10.2 \times \frac{150}{1000} = 1.53$$

$$\text{第11階級} : 5.9 \times \frac{150}{1000} = 0.885$$

これらをもとに、解答に示したヒストグラムを作成する。作図にあたっては、階級の境目となる横軸の値(貯蓄現在高)および縦軸の値(長方形の高さ)を明記する必要があることに留意されたい。

- (2) 第12階級の長方形の高さは、

$$0.885 \times \frac{2}{3} = 0.59 \text{ (答)}$$

となる。設定すべき第12階級の階級幅を $x$ とすると、(1)の計算と同様の調整を行うため、 $x$ は、

$$8.9 \times \frac{150}{x} = 0.59$$

を満たす必要がある。上式を $x$ について解き、小数点以下を四捨五入することにより、第12階級の階級幅=2263(答)と求められる。

- (3) 貯蓄現在高の平均の近似値は、(階級値)×(相対度数)の合計で、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & 75 \times 0.113 + 225 \times 0.092 + 375 \times 0.090 + 525 \times 0.077 + 675 \times 0.072 + 825 \times 0.056 \\ & + 1050 \times 0.095 + 1350 \times 0.070 + 1750 \times 0.085 + 2500 \times 0.102 + 3500 \times 0.059 + 5800 \times 0.089 \\ & = 1518.85 \approx 1519 \text{ (答)} \end{aligned}$$

- (4) 貯蓄現在高の小さい方から相対度数の和(累積相対度数)を計算すると、以下の表のようになる。

| 階級番号 | 相対度数(%) | 累積相対度数(%) |
|------|---------|-----------|
| 1    | 11.3    | 11.3      |
| 2    | 9.2     | 20.5      |
| 3    | 9.0     | 29.5      |
| 4    | 7.7     | 37.2      |
| 5    | 7.2     | 44.4      |
| 6    | 5.6     | 50.0      |
| 7    | 9.5     | 59.5      |
| 8    | 7.0     | 66.5      |
| 9    | 8.5     | 75.0      |
| 10   | 10.2    | 85.2      |
| 11   | 5.9     | 91.1      |
| 12   | 8.9     | 100.0     |

累積相対度数は、第2階級で初めて20%を超え(20.5%)、第10階級で初めて80%を超える(85.2%)。このため、

小さい方から20%の階級番号=2(答)

大きい方から20%の階級番号=10(答)

と求められる。

問題 2

- (1) 乗法モデルにもとづく季節指数については、本来、中心化12か月移動平均（計算方法については、後述）の値で、もとのデータを割り、それを月ごとに平均することにより、求められるものである。このため、与えられたデータをもとに、試験時間中に、実際に季節指数を求めることは困難である。また、穴埋めの数値以外の指数は既に表示されており、かつ、穴埋めの指数は選択肢にある数値から選ばせる形式になっている。以上より、本問は、簡便的に列平均について、10月の数値757を基準値100として、他の月の季節指数の近似値を考えればよいものと思われる。

$$\text{2月の季節指数} \div \frac{628}{757} \times 100 = 82.95 \cdots \div 82$$

$$\text{12月の季節指数} \div \frac{1109}{757} \times 100 = 146.49 \cdots \div 147$$

これらより、アは(b)，イは(f)と、それぞれ空欄を埋められる。

(2)

《ウからカについて》

平成4年と平成25年の各月の数値を、1月から12月まで、逐一比較する。このとき、減少率が最も大きい月は7月であることがわかり、その減少率は、

$$\frac{1246-604}{1246} \times 100 = 51.52 \cdots \div 51.5\% \text{（小数第2位以下四捨五入）}$$

と求められる。また、平成4年と平成25年とを比較するとき、減少率が最も小さい月は1月であり、その減少率は、

$$\frac{930-590}{930} \times 100 = 36.55 \cdots \div 36.6\% \text{（小数第2位以下四捨五入）}$$

と求められる。

《キとクについて》

平成4年から平成25年までの行平均を、逐一比較する。このとき、対前年減少率が最も大きかったのは、平成21年であることがわかり、その減少率は、

$$\frac{673-598}{673} \times 100 = 11.14 \cdots \div 11.1\% \text{（小数第2位以下四捨五入）}$$

と求められる。

(3)

1) 解答を参照のこと。

2) 平成4年の1月から12月までの平均を求めると、

$$\frac{1}{12} \times (930 + 798 + 1062 + 938 + 932 + 930 + 1246 + 776 + 819 + 984 + 972 + 1538) = \frac{1}{12} \times 11925 = 993.75$$

と求められるが、これは、平成4年の6月と7月の間に対応する移動平均である。

同じようにして、平成4年2月から平成5年1月までの平均を求めると、

$$\frac{1}{12} \times (798 + 1062 + 938 + 932 + 930 + 1246 + 776 + 819 + 984 + 972 + 1538 + 902) = \frac{1}{12} \times 11897 = 991.416 \cdots$$

と求められ、これは、平成4年の7月と8月の間に対応する移動平均である。

平成4年7月の中心化12か月移動平均は、上記2つの移動平均をさらに平均したものであり、以下のように求められる。

$$\frac{1}{2} \times (993.75 + 991.416 \cdots) = 992.583 \cdots \div 993 \text{（} \times 10 \text{億円）（小数点以下四捨五入）}$$

この解答速報の著作権はTAC(株)のものであり、無断転載・転用を禁じます。

- 3) 2)の計算と同じように、平成9年の2月と3月の間に対応する移動平均である、平成8年9月から平成9年8月までの平均を求めると、

$$\frac{1}{12} \times (786 + 924 + 931 + 1404 + 894 + 742 + 1180 + 764 + 835 + 848 + 1105 + 738) = \frac{1}{12} \times 11151 = 929.25$$

となる。また、平成9年の3月と4月の間に対応する移動平均である、平成8年10月から平成9年9月までの平均を求めると、

$$\frac{1}{12} \times (924 + 931 + 1404 + 894 + 742 + 1180 + 764 + 835 + 848 + 1105 + 738 + 786) = \frac{1}{12} \times 11151 = 929.25$$

となる。さらに、平成9年の4月と5月の間に対応する移動平均である、平成8年11月から平成9年10月までの平均を求めると、

$$\frac{1}{12} \times (931 + 1404 + 894 + 742 + 1180 + 764 + 835 + 848 + 1105 + 738 + 786 + 920) = \frac{1}{12} \times 11147 = 928.9166\cdots$$

となる。

これらより、

$$\text{平成9年3月の中心化12か月移動平均} = \frac{1}{2} \times (929.25 + 929.25) = 929.25 \text{ (}\times 10\text{億円)}$$

$$\text{平成9年4月の中心化12か月移動平均} = \frac{1}{2} \times (929.25 + 928.9166\cdots) = 929.0833\cdots \text{ (}\times 10\text{億円)}$$

と計算できる。問題文で問われている差は、

$$929.0833\cdots - 929.25 = -0.1666\cdots \div -0.17 \text{ (}\times 10\text{億円)} \text{ (小数第3位以下四捨五入)}$$

と求められる。

- (注) 計算式が理解できていれば、問題文で問われている差は、平成9年の4月と5月の間に対応する移動平均と、平成9年の2月と3月の間に対応する移動平均の差を計算し、それを2で割ることによっても求められる。

### 問題 3

- (1) サイコロを振ったときに出る目の確率変数 $X$ の期待値 $E(X)$ が $\frac{7}{3} \left( = \frac{14}{6} \right)$ であり、各面が出る確率が $\frac{1}{6}$ であること

から、このサイコロの出目の合計は、14となることがわかる。また、1, 2, 3それぞれの数字が少なくとも一つの面に書かれていることから、三面は(1, 2, 3)である。残り三面の出目の合計は、8 ( $= 14 - (1 + 2 + 3)$ ) となることがわかり、これを満たす三つの数の組合せは、(2, 3, 3)のみである。このため、このサイコロには六面のうち一面に1が、二面に2が、三面に3が書かれていることから、求める確率は、

$$\Pr(X=1) = \frac{1}{6} \text{ (答)}$$

$$\Pr(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (答)}$$

$$\Pr(X=3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (答)}$$

と、それぞれ求められる。

- (2) 確率変数 $X$ の2乗の期待値 $E(X^2)$ は、

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{2} = 6$$

と求められるので、 $X$ の分散 $V(X)$ は、

この解答速報の著作権はT A C (株)のものであり，無断転載・転用を禁じます。

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \quad (\text{答})$$

と求められる。

(3)

《ア》について》

このサイコロを2回振ったとき，1と3が出た場合， $Y=1$ ， $Z=3$ となる。その同時確率は，

$$\Pr(Y=1, Z=3) = {}_2C_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

と計算できる。

《イ》について》

サイコロを2回振ったとき，両方とも2が出た場合， $Y=Z=2$ となる。その同時確率は，

$$\Pr(Y=2, Z=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad (\text{答})$$

と計算できる。

《ウ》について》

サイコロを2回振ったとき，2と3が出た場合， $Y=2$ ， $Z=3$ となる。その同時確率は，

$$\Pr(Y=2, Z=3) = {}_2C_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

と計算できる。

《エ》について》

題意により， $Y>Z$ となる確率はゼロである。このため，

$$\Pr(Y=3, Z=1) = 0 \quad (\text{答})$$

となる。

これらと同じような計算を行うことにより，同時確率 $\Pr(Y=y, Z=z)$ の表は，以下のように作成できる。

|       | $Y=1$             | $Y=2$             | $Y=3$         |
|-------|-------------------|-------------------|---------------|
| $Z=1$ | $\frac{1}{36}$    | 0                 | (エ) 0         |
| $Z=2$ | $\frac{1}{9}$     | (イ) $\frac{1}{9}$ | 0             |
| $Z=3$ | (ア) $\frac{1}{6}$ | (ウ) $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

(4)  $Y=2$ となる周辺確率は，

$$\Pr(Y=2) = \Pr(Y=2, Z=1) + \Pr(Y=2, Z=2) + \Pr(Y=2, Z=3) = 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

と求められる。このことより， $Z$ の条件つき確率は，以下のように求められる。

$$\Pr(Z=1 \mid Y=2) = \frac{\Pr(Y=2, Z=1)}{\Pr(Y=2)} = \frac{0}{\left(\frac{4}{9}\right)} = 0$$

$$\Pr(Z=2 \mid Y=2) = \frac{\Pr(Y=2, Z=2)}{\Pr(Y=2)} = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{1}{4}$$

この解答速報の著作権はT A C (株)のものであり，無断転載・転用を禁じます。

$$\Pr(Z=3 \mid Y=2) = \frac{\Pr(Y=2, Z=2)}{\Pr(Y=2)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{3}{4}$$

これらの結果より，条件つき確率 $\Pr(Z \mid Y=2)$ の表は，以下のように作成できる。

|       | $Y=2$             |
|-------|-------------------|
| $Z=1$ | (オ) 0             |
| $Z=2$ | (カ) $\frac{1}{4}$ |
| $Z=3$ | $\frac{3}{4}$     |

(5) (4)で求めた条件つき確率の表により， $Y=2$ が与えられたときの $Z$ の条件つき期待値 $E(Z \mid Y=2)$ は，以下のように求められる。

$$E(Z \mid Y=2) = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{11}{4} \quad (\text{答})$$

同じようにして， $Y=2$ が与えられたときの $Z$ の2乗の条件つき期待値 $E(Z^2 \mid Y=2)$ は，以下のように求められる。

$$E(Z^2 \mid Y=2) = 1^2 \times 0 + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{3}{4} = \frac{31}{4}$$

と求められる。これらより， $Z$ の条件つき分散 $V(Z \mid Y=2)$ は，

$$V(Z \mid Y=2) = E(Z^2 \mid Y=2) - \{E(Z \mid Y=2)\}^2 = \frac{31}{4} - \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \quad (\text{答})$$

と求められる。

第8問 答案用紙<1>  
(統計学)

問題 1

(1)  $r =$   (小数点以下2ケタ)

(2)  $\hat{\alpha} =$   (小数点以下2ケタ)

$\hat{\beta} =$   (小数点以下2ケタ)

(3)  $\hat{\sigma}^2 =$   (小数点以下2ケタ)

$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 =$   (小数点以下2ケタ)

(4) (仮説検定の詳細と検定結果)

検定統計量として、 $T = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2}}$  をもちいる。この検定統計量  $T$  は、帰無仮説のもとで、自由度8の  $t$  分布に従う。このため、有意水準0.05でのこの片側検定の棄却域は  $T > 1.860$  となる。  
この検定統計量  $T$  の値は、帰無仮説のもとで、上の設問の結果から、近似的に、 $T = \frac{0.29}{\sqrt{0.01}} = 2.9$  と求められるため、帰無仮説は棄却される。

第8問 答案用紙<2>  
(統計学)

問題 2

(1)

| ア | イ    | ウ     | エ    |
|---|------|-------|------|
| 4 | カイ2乗 | 10.78 | 7.78 |

| オ     |
|-------|
| 棄却される |

(ウ，エについては小数点以下2ケタ)

(2)

| カ    | キ | ク    |
|------|---|------|
| 1.60 | 3 | カイ2乗 |

| ケ    | コ    | サ     |
|------|------|-------|
| 0.13 | 6.25 | 採択される |

(カ，ケ，コについては小数点以下2ケタ)

# 第8問 答案用紙<3> (統計学)

## 問題3

(1) 1)  $\Pr(A \cap B_1) =$  0.18 (小数点以下2ケタ)

2)  $\Pr(A^c \cup B_3) =$  0.75 (小数点以下2ケタ)

3)  $\Pr(A|B_1) =$  0.51 (小数点以下2ケタ)

4)  $\Pr(A^c|B_1 \cup B_2) =$  0.67 (小数点以下2ケタ)

(2) 1)

| 関係                                                     |
|--------------------------------------------------------|
| $\pi(\theta y) \propto f(y \theta) \times \pi(\theta)$ |

2)

| 式                               |
|---------------------------------|
| ${}_5C_3 \theta^3 (1-\theta)^2$ |

3)

| 式                        | $E(\theta y)$ |
|--------------------------|---------------|
| $60\theta^3(1-\theta)^2$ | $\frac{4}{7}$ |

4)

| 式                                                                                                           | $E(\theta y)$       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\left\{ \int_0^1 \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1} d\theta \right\}^{-1} \times \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1}$ | $\frac{p+3}{p+q+5}$ |

【解答への道】

I 合格ライン

問題 1

単回帰分析についての出題である。基本的な内容の問題であり、素点で7割程度の正答率が望まれる。

問題 2

ポアソン分布への適合度検定についての出題である。後半の問題を完答するには相当の計算力を要するが、前半の問題は基本的な適合度検定の問題であり、素点で6割から7割程度の正答率が望まれる。

問題 3

ベイズの定理およびベイズ統計についての出題である。後半のベイズ統計の問題を完答するには、ベイズ統計に関する知識や相当の計算力を必要とし、大半の受験生は解答が難しかったと思われるが、前半の問題は基本的なベイズの定理を使う問題であり、素点で5割程度の正答率が得られれば十分であろうと思われる。

全体として、第8問の合格ラインは、素点で60%程度と考えられる。

II 答練との対応関係

問題 1

|             |      |             |      |
|-------------|------|-------------|------|
| 基礎答練第4回 第2問 | 問題 1 | 直前答練第1回 第2問 | 問題 3 |
| 直前答練第2回 第2問 | 問題 3 | 公開模試第2回 第8問 | 問題 2 |

問題 2

|             |      |             |      |
|-------------|------|-------------|------|
| 基礎答練第4回 第1問 | 問題 3 | 応用答練第1回 第2問 | 問題 1 |
| 公開模試第1回 第8問 | 問題 2 | 公開模試第2回 第8問 | 問題 1 |

問題 3

|             |      |             |      |
|-------------|------|-------------|------|
| 直前答練第2回 第1問 | 問題 2 | 直前答練第4回 第1問 | 問題 3 |
| 公開模試第2回 第7問 | 問題 2 |             |      |

## 問題 1

- (1) 消費支出 $y$ と可処分所得 $x$ の標本相関係数 $r$ は、つぎのように求められる。

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{1198.5}{\sqrt{4064.9} \times \sqrt{668.9}} = 0.726 \dots \doteq 0.73$$

- (2) 回帰方程式  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$  における $\alpha$ および $\beta$ の最小2乗推定値 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ は、つぎのように求められる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1198.5}{4064.9} = 0.294 \dots \doteq 0.29$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 45.9 - \frac{1198.5}{4064.9} \times 75.8 = 23.551 \dots \doteq 23.55$$

- (3) 誤差項 $u_i$ の分散 $\sigma^2$ の不偏推定値 $\hat{\sigma}^2$ は、つぎのように求められる。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10-2} \sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i^2 = \frac{1}{10-2} \times 315.5 = 39.4375 \doteq 39.44$$

さらに、 $\hat{\sigma}^2$ にもとづく $\hat{\beta}$ の標本分散の推定値 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2$ は、つぎのように求められる。

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{39.4375}{4064.9} = 0.0097 \dots \doteq 0.01$$

- (4) 解答を参照のこと。

## 問題 2

- (1) ポアソン分布への適合度検定の問題である。調査期間(100日間)のうち、1日当たりの実際の交通事故死者数が、0人であった日数を $x_0$ 、1人であった日数を $x_1$ 、2人であった日数を $x_2$ 、3人であった日数を $x_3$ 、4人以上であった日数を $x_4$ とする。一方、1日当たりの交通事故死者数がポアソン分布に従っていると仮定したうえで、100日間のうち、1日当たり交通事故死者数が0人となる理論日数を $e_0$ 、1人となる理論日数を $e_1$ 、2人となる理論日数を $e_2$ 、3人となる理論日数を $e_3$ 、4人以上となる理論日数を $e_4$ とする。このとき、交通事故死者数がポアソン分布に従うかどうかを確かめるための検定統計量 $\chi^2$ は、つぎのように示される。

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^4 \frac{(x_i - e_i)^2}{e_i}$$

1日当たりの交通事故死者数が平均2.1のポアソン分布に従っているという帰無仮説をたて、有意水準0.1で適合度検定を行うとき、帰無仮説が正しいなら、検定統計量 $\chi^2$ の漸近分布は、自由度4(=5-1)のカイ2乗分布で近似できる。

1日当たりの交通事故死者数が平均2.1のポアソン分布に従っているとき、死者数が0人、1人、2人、3人、4人以上となる発生確率が、問題文の表に与えられている。これをもちいると、理論日数 $e_0$ 、 $\dots$ 、 $e_4$ は、つぎのように求められる。

$$\text{1日当たりの交通事故死者数が0人となる理論日数 } e_0 = 100 \times 0.12 = 12$$

$$\text{1日当たりの交通事故死者数が1人となる理論日数 } e_1 = 100 \times 0.26 = 26$$

$$\text{1日当たりの交通事故死者数が2人となる理論日数 } e_2 = 100 \times 0.27 = 27$$

この解答速報の著作権はTAC(株)のものであり、無断転載・転用を禁じます。

$$1日当たりの交通事故死者数が3人となる理論日数  $e_3 = 100 \times 0.19 = 19$$$

$$1日当たりの交通事故死者数が4人以上となる理論日数  $e_4 = 100 \times 0.16 = 16$$$

これらにより、検定統計量  $\chi^2$  の値は、つぎのように求められる。

$$\chi^2 = \frac{(19-12)^2}{12} + \frac{(32-26)^2}{26} + \frac{(27-27)^2}{27} + \frac{(14-19)^2}{19} + \frac{(8-16)^2}{16} = 10.783 \dots \div 10.78$$

カイ2乗分布表より、自由度4のカイ2乗分布における上側10%点は7.78であるので、棄却域は7.78以上となる。これらのことより、検定統計量  $\chi^2$  の値10.78は、棄却域にあるので、帰無仮説は棄却される。

(2) 問題文の表の「4人以上」の場合を4人とすると、調査期間100日間における交通事故死者数の合計は、つぎのように求められる。

$$\text{交通事故死者数の合計} = 0 \times 19 + 1 \times 32 + 2 \times 27 + 3 \times 14 + 4 \times 8 = 160 \text{ (人)}$$

この交通事故死者数の合計を100日で割ると、1日当たりの交通事故死者数の平均は、つぎのように推定される。

$$1日当たりの交通事故死者数の平均 = 160 \div 100 = 1.60$$

この結果をもとにすると、1日当たりの交通事故死者数が平均1.6のポアソン分布に従っているという帰無仮説がたてられる。事故死者数の平均を推定するときに標本平均をもちいているため、有意水準0.1で適合度検定を行うとき、帰無仮説が正しいなら、(1)で示した検定統計量  $\chi^2$  の漸近分布は、自由度3(=5-1-1)のカイ2乗分布で近似できる。

この帰無仮説のもとで、死者数が0人、1人、2人、3人、4人以上となる発生確率は、つぎのように求められる。ただし、死者数が4人以上となる発生確率は、死者数が4人以上となる事象が死者数が0人から3人までの事象の余事象となることを考慮して求める。

$$1日当たりの交通事故死者数が0人となる発生確率 = \frac{1.60^0}{0!} \times e^{-1.60} = \frac{1}{1} \times 0.202 = 0.202$$

$$1日当たりの交通事故死者数が1人となる発生確率 = \frac{1.60^1}{1!} \times e^{-1.60} = \frac{1.60}{1} \times 0.202 = 0.3232$$

$$1日当たりの交通事故死者数が2人となる発生確率 = \frac{1.60^2}{2!} \times e^{-1.60} = \frac{2.560}{2} \times 0.202 = 0.25856$$

$$1日当たりの交通事故死者数が3人となる発生確率 = \frac{1.60^3}{3!} \times e^{-1.60} = \frac{4.0960}{6} \times 0.202 = 0.13789 \dots$$

$$1日当たりの交通事故死者数が4人以上となる発生確率 = 1 - 0.202 - 0.3232 - 0.25856 - \frac{4.0960}{6} \times 0.202 = 0.07834 \dots$$

さらに、この帰無仮説のもとで、理論日数  $e_0, \dots, e_4$  は、つぎのように求められる。

$$1日当たりの交通事故死者数が0人となる理論日数  $e_0 = 100 \times 0.202 = 20.2$$$

$$1日当たりの交通事故死者数が1人となる理論日数  $e_1 = 100 \times 0.3232 = 32.32$$$

$$1日当たりの交通事故死者数が2人となる理論日数  $e_2 = 100 \times 0.25856 = 25.856$$$

$$1日当たりの交通事故死者数が3人となる理論日数  $e_3 = 100 \times 0.13789 \dots = 13.78 \dots$$$

$$1日当たりの交通事故死者数が4人以上となる理論日数  $e_4 = 100 \times 0.07834 \dots = 7.834 \dots$$$

これらをもとにすると、検定統計量  $\chi^2$  の値は、つぎのように求められる。

$$\chi^2 = \frac{(19-20.2)^2}{20.2} + \frac{(32-32.32)^2}{32.32} + \frac{(27-25.856)^2}{25.856} + \frac{(14-13.78 \dots)^2}{13.78 \dots} + \frac{(8-7.834 \dots)^2}{7.834 \dots} = 0.131 \dots \div 0.13$$

カイ2乗分布表より、自由度3のカイ2乗分布における上側10%点は6.25であるので、棄却域は6.25以上となる。これに対して、検定統計量の値は6.25を下回るので、帰無仮説は採択される。

問題 3

(1)

- 1) 「高熱」かつ「解熱効果が非常に有り」の確率  $\Pr(A \cap B_1)$  は，つぎのように求められる。

$$\Pr(A \cap B_1) = \Pr(B_1 | A) \times \Pr(A) = 0.60 \times 0.3 = 0.18$$

- 2) 「微熱」と「高熱」は排反なので，「微熱」または「解熱効果が全くなし」の確率  $\Pr(A^c \cup B_3)$  は，つぎのように求められる。

$$\Pr(A^c \cup B_3) = \Pr(A^c) + \Pr(B_3 | A) \times \Pr(A) = 0.7 + 0.15 \times 0.3 = 0.745 \doteq 0.75$$

- 3) 「解熱効果が非常に有り」の中で「高熱」の確率  $\Pr(A | B_1)$  は，つぎのように求められる。

$$\Pr(A | B_1) = \frac{\Pr(A \cap B_1)}{\Pr(B_1)} = \frac{\Pr(B_1 | A) \times \Pr(A)}{\Pr(B_1 | A) \times \Pr(A) + \Pr(B_1 | A^c) \times \Pr(A^c)} = \frac{0.60 \times 0.3}{0.60 \times 0.3 + 0.25 \times 0.7} = 0.507 \dots \doteq 0.51$$

- 4) 「解熱効果が非常に有り」と「解熱効果が少し有り」は排反なので，「解熱効果が非常に有り」または「解熱効果が少し有り」の中で「微熱」の確率  $\Pr(A^c | B_1 \cup B_2)$  は，つぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \Pr(A^c | B_1 \cup B_2) &= \frac{\Pr(B_1 \cup B_2 | A^c) \times \Pr(A^c)}{\Pr(B_1 \cup B_2)} \\ &= \frac{\{\Pr(B_1 | A^c) + \Pr(B_2 | A^c)\} \times \Pr(A^c)}{\Pr(B_1) + \Pr(B_2)} \\ &= \frac{\{\Pr(B_1 | A^c) + \Pr(B_2 | A^c)\} \times \Pr(A^c)}{\Pr(B_1 | A) \times \Pr(A) + \Pr(B_1 | A^c) \times \Pr(A^c) + \Pr(B_2 | A) \times \Pr(A) + \Pr(B_2 | A^c) \times \Pr(A^c)} \\ &= \frac{(0.25 + 0.50) \times 0.7}{0.60 \times 0.3 + 0.25 \times 0.7 + 0.25 \times 0.30 + 0.50 \times 0.7} = 0.673 \dots \doteq 0.67 \end{aligned}$$

(2)

- 1) ベイズの定理をもとにすると，事後確率分布  $\pi(\theta | y)$  は，尤度関数  $f(y | \theta)$  と事前確率分布  $\pi(\theta)$  の積に比例するという，つぎの関係が示される。

$$\pi(\theta | y) \propto f(y | \theta) \times \pi(\theta)$$

なお， $\propto$  は，「左辺は右辺に比例する」という意味である。

- 2) あるゲームに勝利する確率を  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) とすると，5回ゲームを行うとき勝利する回数は，試行回数5回，成功確率  $\theta$  の二項分布に従う。このため，5回ゲームを行い3回勝利する確率  $f(y | \theta)$  は，つぎのように求められる。

$$f(y | \theta) = {}_5C_3 \theta^3 (1 - \theta)^2 = 10 \theta^3 (1 - \theta)^2$$

- 3)  $\theta$  の事前確率分布を一様分布  $\pi(\theta) = 1$  ( $0 < \theta < 1$ ) とするとき， $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta | y)$  は， $k$  を正の比例定数とすると，つぎのように示される。

$$\pi(\theta | y) = k \times f(y | \theta) \times \pi(\theta) = k \times {}_5C_3 \theta^3 (1 - \theta)^2 \times 1 = 10k \times \theta^3 (1 - \theta)^2$$

確率の総和は1となることから， $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta | y)$  をすべての  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) で積分すると1となる。このことから，つぎの関係が示される。

$$\int_0^1 \pi(\theta | y) d\theta = 10k \int_0^1 \theta^3 (1 - \theta)^2 d\theta = 10k \int_0^1 \theta^3 (1 - 2\theta + \theta^2) d\theta = 10k \times \left[ \frac{1}{4} \theta^4 - \frac{2}{5} \theta^5 + \frac{1}{6} \theta^6 \right]_0^1 = 10k \times \frac{1}{60} = 1$$

この関係式から， $10k = 60$  となるので， $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta | y)$  は，つぎのように求められる。

$$\pi(\theta | y) = 60 \theta^3 (1 - \theta)^2$$

この  $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta | y)$  はパラメータ4 ( $= 3 + 1$ )，3 ( $= 2 + 1$ ) のベータ分布  $Be(4, 3)$  となるので， $\theta$  の事後

この解答速報の著作権はTAC(株)のものであり、無断転載・転用を禁じます。

期待値  $E(\theta|y)$  は、つぎのように求められる。

$$E(\theta|y) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

- 4)  $\theta$  の事前確率分布  $\pi(\theta)$  をベータ分布  $Be(p, q)$  とするとき、 $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta|y)$  は、 $k$  を正の比例定数とすると、つぎのように示される。

$$\pi(\theta|y) = k \times f(y|\theta) \times \pi(\theta) = k \times {}_5C_3 \theta^3 (1-\theta)^2 \times \theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1} = 10k \times \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1}$$

確率の総和は1となることから、 $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta|y)$  をすべての  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) で積分すると1となる。このことから、つぎの関係が示される。

$$\int_0^1 \pi(\theta|y) d\theta = 10k \int_0^1 \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1} d\theta = 1$$

この関係式から、

$$10k = \frac{1}{\int_0^1 \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1} d\theta}$$

となるので、 $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta|y)$  は、つぎのように求められる。

$$\pi(\theta|y) = \frac{1}{\int_0^1 \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1} d\theta} \times \theta^{p+2} (1-\theta)^{q+1}$$

この  $\theta$  の事後確率分布  $\pi(\theta|y)$  はパラメータ  $p+3$  ( $=p+2+1$ ) ,  $q+2$  ( $=q+1+1$ ) のベータ分布  $Be(p+3, q+2)$  となるので、 $\theta$  の事後期待値  $E(\theta|y)$  は、つぎのように求められる。

$$E(\theta|y) = \frac{p+3}{(p+3)+(q+2)} = \frac{p+3}{p+q+5}$$