

工学の基礎＜数学＞第1回 「関数／極限／数列」

■今回の内容

各種関数 … 三角関数, 指数・対数関数, 合成関数, 逆関数, 逆三角関数, 双曲関数
関数・数列と極限 … 極限, 無限級数

■ 1. 三角関数

【過去問演習 1-1】 A, B, C に関する連立方程式

$$\begin{cases} \sin A - \sin B - \sin C = 0 \\ \cos A + \cos B + \cos C = 0 \end{cases}$$

が成り立つとき, $\cos(A+B)$ の値はいくらか。

(H19 労働基準監督官 B)

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. 2

■解説■

連立方程式には角度 $A+B$ の直接の情報がないので, 加法定理より次のように変形する。

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \cdots \textcircled{1}$$

①より, $\cos A \cos B, \sin A \sin B$ の値が欲しいのと, 連立の式から $\sin C, \cos C$ の値を消去したいので, 連立の式の $\sin C, \cos C$ を移項し, 両辺を2乗すると,

$$\begin{cases} (\sin A - \sin B)^2 = \sin^2 C \\ (\cos A + \cos B)^2 = \cos^2 C \end{cases}$$

となる。 $\sin C, \cos C$ の消去の為, 両辺をそれぞれ加えると,

$$(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 = \sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

となる。左辺を展開すると,

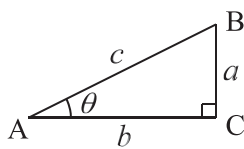
$$\begin{aligned} & (\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 \\ &= (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) - 2\sin A \sin B + 2\cos A \cos B \\ &= 2(1 - \sin A \sin B + \cos A \cos B) = 1 \end{aligned}$$

これを解いて, $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = -\frac{1}{2}$ となる。

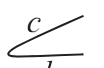
よって, 正解は2となる。

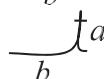
◆ 三角比

(1) **三角比の定義**：直角三角形は、直角以外の 1 つの角度が決まることで、3 辺の長さの比が決まる。この比のことを**三角比**といい、それぞれについて右図のように名前がついている ($\angle A = \theta$ とする)。

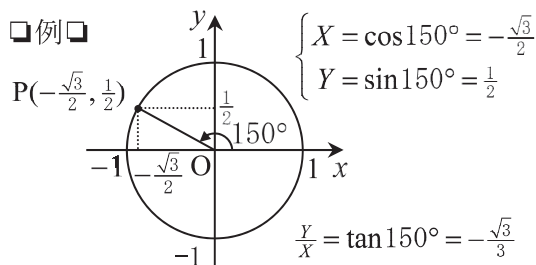
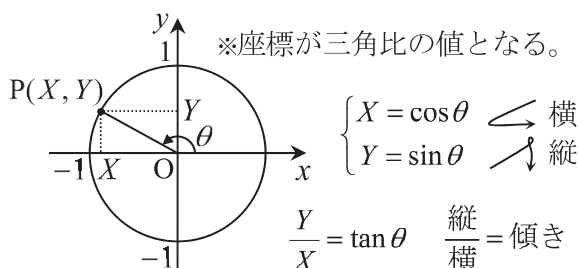


正弦： $\sin \theta = \frac{a}{c}$ 

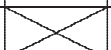
余弦： $\cos \theta = \frac{b}{c}$ 

正接： $\tan \theta = \frac{a}{b}$ 

(2) **単位円**：三角比(特に 90° より大きい)は**単位円**(半径が 1 の円)を座標平面に書いてその値を考える。



(3) 特別角の三角比

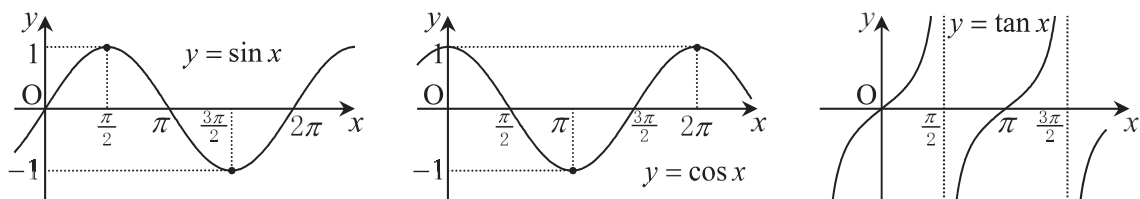
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

✚α

θ	15°	18°	36°	54°	72°	75°
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan \theta$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$

◆ 三角関数

(1) **三角関数の定義**：三角比の値の関数を三角関数という。下図は $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ のグラフである。



通常、三角関数を使用するとき、角度は**弧度法**を用いて表現する。これは、 $0^\circ \sim 360^\circ$ の代わりに、 $0 \sim 2\pi$ の値を用いるもので、下表のように対応する。

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

(2) 「三角関数の x の変域は $\sin$ と $\cos$ がともに実数全体、 $\tan$ は $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数)、 y の変域は $\sin$ と $\cos$ がともに $-1 \leq y \leq 1$ であり、 $\tan$ が実数全体」である。

◆ 三角関数の還元公式

$$\begin{aligned}
 (1) \quad -\theta \text{ と } \theta : & \begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases} \\
 (2) \quad \pi \pm \theta \text{ と } \theta : & \begin{cases} \sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin \theta \\ \cos(\pi \pm \theta) = \mp \cos \theta \\ \tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan \theta \end{cases} \quad (\text{複号同順：符号は「上どうし」「下どうし」が対応}) \\
 (3) \quad \frac{\pi}{2} \pm \theta \text{ と } \theta : & \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \frac{1}{\tan \theta} \end{cases} \quad (\text{複号同順})
 \end{aligned}$$

・これらの覚え方：(π の整数倍) $\pm \theta$ のときは、 $\sin$, $\cos$, $\tan$ はそのまま、($\frac{\pi}{2}$ の整数倍) $\pm \theta$ のときは、 $\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \frac{1}{\tan}$ と交換し、符号は $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ (ぐらい) とし、単位円を考えて $\pi \pm \theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ の座標の符号を読み取るとよい。

◆ 三角関数の相互関係

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ (これを变形すると, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$)
(2) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
(3) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

特に(1)は頻出で、式の計算や、 $\sin$ と $\cos$ の混ざった式をどちらかかに統一する為に用いる。

・ $(\sin \theta)^2$ は $\sin^2 \theta$ と表す($\sin \theta^2$ とすると「 θ^2 の $\sin$ 」という意味になってしまうので注意！)。

□例□ $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。:

$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$ となり, これが $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ と等しいから, $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$ より, $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$ となる。

◆ 三角関数の加法定理

- (1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (複号同順)
(2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (複号同順)
(3) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ (複号同順)

◆ 倍角の公式, 半角の公式, 三倍角の公式

◇(1)～(3)は倍角の公式: 加法定理において $\beta \mapsto 2$ (β に α を代入) とすれば導ける。

- (1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
(2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
(3) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

・(1)より, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, (2)より, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ が導かれることに注意! これらの式は微積分(特に積分)の計算で重要となる。なぜなら, 全て右辺の方が積分しやすい形である ($\int f(2x)dx = \frac{1}{2}F(2x) + C$)。

◇(4)～(6)は半角の公式: 倍角の公式において $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{2}$ (α に $\frac{\alpha}{2}$ を代入) とすれば導ける。

- (4) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$
(5) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$
(6) $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

◇ **【α】** (7)～(9) は三倍角の公式：加法定理において $\beta \mapsto 2\alpha$ とし、倍角の公式を使えば導ける。

$$(7) \quad \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$(8) \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$(9) \quad \tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$$

◆ **【α】 三角関数の tan による有理式表示**

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ とおくと, } \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

・三角関数の積分でよく使う置換のパターン。 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$ より、

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} \cdot dt \text{ とセットで覚えるとよい。}$$

◆ **【α】 積 ↔ 和の公式**

加法定理から、次の公式が導かれる。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

◆ **三角関数の合成公式**

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \quad \text{但し, } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□例□ $0 \leq x < 2\pi$ のとき、方程式 $\sin x - \cos x = 1$ を解け。：

$$\text{合成公式より, } \sin x - \cos x = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \sin(x + \alpha) = \sqrt{2} \sin(x + \alpha) \text{ で, } \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので、 $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ である。よって、 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ より、 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ より, } x = \frac{\pi}{2}, \pi \text{ となる。}$$

■ 加法定理以降の「倍角・半角・三倍角」「三角関数の有理式表示」「和 ↔ 積の公式」「合成公式」はすべて加法定理から導くことができる。本試験では導いている時間はないので、確実に覚えるのが基本。しかし、時間のあるときに1回は導いておくと、ド忘れしてもカバーできる。

■ 2. 指数関数

【過去問演習 1-2】関数 $y = 2 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 31$ の最小値はいくらか。

(H20 国家Ⅱ種)

1. -7 2. -1 3. 1 4. 7 5. 17

■ 解説 ■

関数の式は指数法則を用いて変形すると、

$$y = 2 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 31 = 2 \cdot (2^2)^x - 2^x \cdot 2^4 + 31 = 2 \cdot (2^x)^2 - 2^4 \cdot 2^x + 31$$

となる。この式において、 2^x が複数回登場しているので、 $X = 2^x$ とおくと、 y は X の 2 次関数となる。ここで注意すべきは、「関数で文字の置換えをしたときは、置換えた文字の値の動く範囲(変域)をチェックする」ことである。いま、 x がすべての実数を動くとき、 $X = 2^x > 0$ より、 X は 0 以下の値はとらず、正の値をすべて動くから、

$$y = 2X^2 - 16X + 31 \quad (\text{ただし, } X > 0)$$

という、 X (の変域) に制限のついた 2 次関数になっている。

2 次関数の最小値を求めるためには、一般形を平方完成形 $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形し考えればよい。

$$y = 2X^2 - 16X + 31 = 2(X^2 - 8X) + 31 = 2(X-4)^2 + 31 - 2 \cdot (-4)^2 = 2(X-4)^2 - 1$$

となるから、 y は $X = 4$ のとき(これは $X > 0$ を満たす!)に、最小値 -1 をとることがわかる。

よって、正解は 2 となる。

◆ 指数法則

$a > 0$ とするとき、次の式(指数法則)が成り立つ。

$$(1) \quad a^x \times a^y = a^{x+y}, \quad a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$\square \text{例} \square \quad 4 \cdot 2^x = 2^2 \times 2^x = 2^{x+2}, \quad 5^5 \div 5^2 = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} = 5^{5-2} = 5^3$$

$$(2) \quad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$$

$$\square \text{例} \square \quad (7^2)^3 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^{2 \times 3} = 7^6$$

$$(3) \quad (ab)^x = a^x b^x$$

$$\square \text{例} \square \quad 10^3 = (2 \times 5)^3 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 2^3 \cdot 5^3$$

◆ 指数の拡張

$a > 0$ とするとき、次の式(指数法則)が成り立つ。

$$(A) \quad a^0 = 1 \quad (\because \text{指数法則(1)より, } 1 = a^x \div a^x = a^{x-x} = a^0)$$

$$(B) \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \text{一般には } a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (\because \text{指数法則(1)と(A)より, } \frac{1}{a^x} = a^0 \div a^x = a^{0-x} = a^{-x})$$

□例□ $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ である x に対して、正の値 $x - \frac{1}{x}$ を求めよ。

$x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$, $x - \frac{1}{x} = x - x^{-1}$ と指数を用いて表せる。求める値 $x - x^{-1}$ を A とすると、

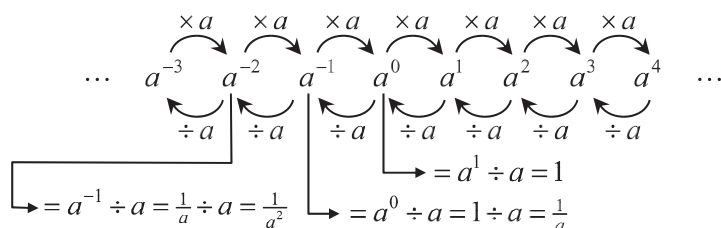
$$A^2 = (x - x^{-1})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{-1} + (x^{-1})^2 = x^2 - 2 \cdot x^0 + x^{-2} = x^2 + x^{-2} - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

一方、 $(\sqrt{5})^2 = (x + x^{-1})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot x^{-1} + (x^{-1})^2 = x^2 + 2 \cdot x^0 + x^{-2} = x^2 + x^{-2} + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$ であるから、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、 $A^2 - 5 = -2 - 2$, $A^2 = 1$, A は正の値だから、 $A = 1$ となる。

(C) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, 一般には $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

($\because$ 指数法則(2)より、 $X = a^{\frac{1}{2}}$ とおくと、 $X^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$, よって X は a の平方根となる。)

・ (A) や (B) の式は、次図から直感的に理解することができる。

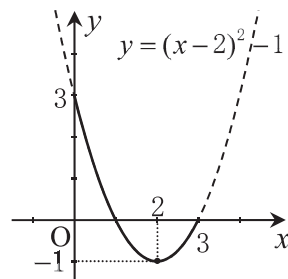


◆ 変域・文字の置換

(1) y が x の関数であるとする。このとき、 x が動く範囲のことを「 x の変域(または定義域)」といい、 y が動く範囲のことを「 y の変域(または値域)」という。

□例□ 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) の y の変域を求めよ。:

式を平方完成すると、 $y = (x - 2)^2 - 1$ となり、グラフの概形は右図のようになる。いま、 x の変域が $0 \leq x \leq 3$ であるから、 y の値はこの間のグラフの最小値 -1 から最大値 3 までを動く。よって、 y の変域は $-1 \leq y \leq 3$ である。



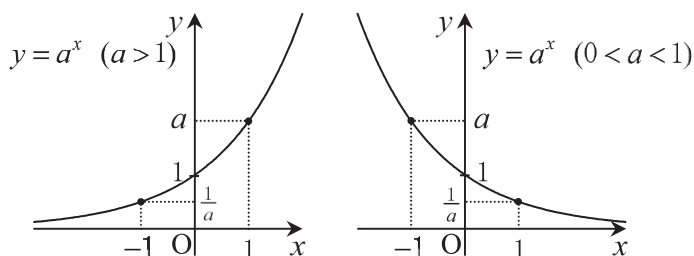
(2) 関数で文字の置換えをしたときは、置換えた文字の値の動く範囲(変域)をチェック!

□例□ $y = x^4 + 2x^2 + 2$ の y の変域を求めよ。:

$y = (x^2)^2 + 2x^2 + 2$ であるから、 $X = x^2$ とおくと、 $y = X^2 + 2X + 2$ となり、平方完成して、 $y = (X + 1)^2 + 1$ となる。最小値は 1 になりそうだが、 X の変域が $X = x^2 \geq 0$ となり、 $X = -1$ とはなれない。ここで $(X + 1)^2$ が $X \geq 0$ の変域で最小となるのは、 $X = 0$ のときだから、最小値は $y = (0 + 1)^2 + 1 = 2$ となる。よって、 y の変域は $y \geq 2$ である。

◆ 指数関数

(1) **指数関数の定義**：正の定数 $a > 0$ が $a \neq 1$ のとき、関数 $y = a^x$ を、 a を^{てい}底とする x の指数関数という。



(2) 指数関数 $y = a^x$ はすべての実数 x を動き(定義され)、その値(y 座標)は必ず正である。

言い換えると、「指数関数 $y = a^x \ (a > 0)$ の x の変域は実数全体、 y の変域は $y > 0$ 」である。

(3) 底 a が 1 より大きいのか、小さいかで $y = a^x$ のグラフの概形は違う。

$a > 1$ のとき $\Rightarrow$ グラフは右上がり(単調増加という)。

$0 < a < 1$ のとき $\Rightarrow$ グラフは右下がり(単調減少という)。

(4) 指数の形をした数の大きさを比べるときは、指数か底を揃える！

□例□ $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$, 10^{-10} , 27^{-6} を小さい順に並べよ。:

まず、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ と 10^{-10} の指数を揃える。 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{10} = \left(\frac{1}{9}\right)^{10}$ となり、 $10^{-10} = (10^{-1})^{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ となる。 $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ より、 $\left(\frac{1}{9}\right)^{10} > \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ つまり、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20} > 10^{-10}$ である。次に、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ と 27^{-6} の底を揃える。 $27^{-6} = (3^3)^{-6} = (3^{-1})^{18} = \left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ である。関数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は単調減少だから、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{18} > \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ つまり、 $27^{-6} > \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ である。以上から、小さい順に、 10^{-10} , $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$, 27^{-6} となる。

■ 置換をしたら変域(区間)をチェック！

数学では文字や式の置換(変数変換)をして状況を打開することが多くあります。このとき、どのような置換が良いかだけをつい考えがちですが、良い置換をみつけたら、必ず変域(区間)をチェックしましょう。特に、最大値・最小値の問題や積分の計算では常に意識が必要です。

■ 3. 対数関数

【過去問演習 1-3】 3^{60} の桁数と最高位の数字の組合せとして正しいのはどれか。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(H13 国家Ⅱ種-農業土木)

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. 桁数…29, 最高位の数字…5 | 2. 桁数…29, 最高位の数字…4 |
| 3. 桁数…28, 最高位の数字…5 | 4. 桁数…28, 最高位の数字…4 |
| 5. 桁数…27, 最高位の数字…5 | |

■ 解説 ■

3^{60} の桁数を求める為、常用対数(底が 10 の対数)をとると、 $\log_{10} 3^{60} = 60 \log_{10} 3$ となり、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから、

$$\log_{10} 3^{60} = 60 \log_{10} 3 = 60 \times 0.4771 = 28.626$$

となる。よって、

$$28 \leq \log_{10} 3^{60} < 29 \Leftrightarrow 28 \log_{10} 10 \leq \log_{10} 3^{60} < 29 \log_{10} 10 \Leftrightarrow \log_{10} 10^{28} \leq \log_{10} 3^{60} < \log_{10} 10^{29}$$

であるから、真数を比べて、 $10^{28} \leq 3^{60} < 10^{29}$ となるので、 3^{60} は 29 桁であることがわかる。

選択肢から最高位の数字は 4 か 5 なので、

$$\log_{10}(4 \cdot 10^{28}) = 28 + \log_{10} 4 = 28 + 2 \log_{10} 2 = 28 + 0.6020 = 28.602$$

$$\log_{10}(5 \cdot 10^{28}) = 28 + \log_{10} \frac{10}{2} = 28 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 29 - 0.3010 = 28.699$$

となる。よって、 $28.602 < 28.626 < 28.699 \Leftrightarrow \log_{10}(4 \cdot 10^{28}) < \log_{10} 3^{60} < \log_{10}(5 \cdot 10^{28})$ だから、真数を比べて、 $4 \cdot 10^{28} < 3^{60} < 5 \cdot 10^{28}$ となるので、 3^{60} の最高位の数字は 4 であることがわかる。

以上から、正解は 2 となる。

◆ 対数

(1) **対数の定義** : $a > 0, a \neq 1$ とする。正の数 $M > 0$ に対し、 $M = a^p$ を満たす p を a を底とする真数 M の対数といい、記号で $p = \log_a M$ と表す。要は「 M は a の何乗か」という指数が $\log$ であり、真数 = 底^{指数} $\Leftrightarrow$ 指数 = $\log_{\text{底}}$ 真数 である。

□例□ $\log_2 1024$ はいくつか。:

「1024 は 2 の何乗か」ということなので、1024 を 2 で素因数分解すれば、 $1024 = 2^{10} \Leftrightarrow \log_2 1024 = 10$ となる。

(2) **対数の性質 (公式)** : $M = a^p \Leftrightarrow p = \log_a M$ (真数 = 底^{指数} $\Leftrightarrow$ 指数 = $\log_{\text{底}}$ 真数) から、

次の式が成り立つ。

① $\log_a a = 1$ ※ a (真数) は a (底) の 1 乗 (指数)、 $\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a \frac{1}{a} = -1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ※ 真数の [積] = 対数の [和]

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad \text{※ 真数の [商] = 対数の [差]}$$

③ $\log_a M^k = k \log_a M$ ※真数の[k 乗]=対数の[k 倍]

特に, $\log_a \frac{1}{N} = \log_a N^{-1} = -\log_a N$, $\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a M$

□例□ $\log_2 0.5 + \log_5 500 - \log_5 4$ を計算せよ. :

$$\log_2 0.5 + \log_5 500 - \log_5 4 = \log_2 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{500}{4} = \log_2 2^{-1} + \log_5 5^3 = -\log_2 2 + 3 \log_5 5 = -1 + 3 = 2$$

(3) **底の変換公式**: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ※底を $a \mapsto c$ に変換している 特に, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

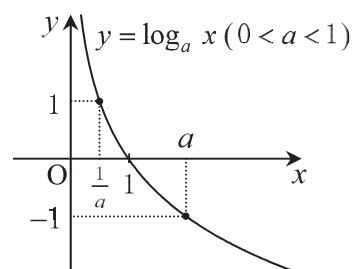
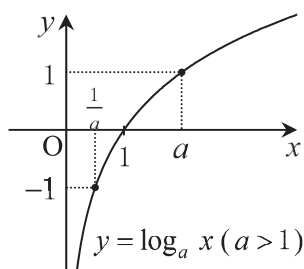
□例□ $\log_2 27 \times \log_3 32$ を計算せよ. :

$$\text{底を } 2 \text{ に合わせる. } \log_2 27 \times \log_3 32 = \log_2 3^3 \times \frac{\log_2 32}{\log_2 3} = 3 \log_2 3 \times \frac{\log_2 2^5}{\log_2 3} = 3 \times 5 \times \log_2 2 = 15$$

◆ 対数関数

(1) **対数関数の定義**: 正の定数 $a > 0$ が $a \neq 1$ のとき, 関数 $y = \log_a x$ を, a を^{てい}底とする x の**対数関数**という。

(2) 対数関数 $y = \log_a x$ は $x > 0$ を動き(定義され), その値(y 座標)はすべての実数をとれる。



言い換えると, 「対数関数 $y = \log_a x$ ($a > 0$) の x の変域は $x > 0$, y の変域は実数全体」である。

(3) 底 a が 1 より大きい, 小さいかで $y = \log_a x$ のグラフの概形は違う。

・ $a > 1$ のとき: グラフは右上がり(単調増加という)。

・ $0 < a < 1$ のとき: グラフは右下がり(単調減少という)。

指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ は直線 $y = x$ に関して対称である。この 2 つの関数は**逆関数**の関係になっており, 一般に逆関数どうしのグラフは直線 $y = x$ に関して対称である。

(4) 対数のある方程式・不等式を解く際は, 「真数 > 0 」の**真数条件**をまず考える。

□例□ $\log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5} x < -1$ を解け. :

真数条件から, $x-1 > 0, x > 0 \Rightarrow x > 1 \cdots \textcircled{1}$ である。まず, -1 を 0.5 を底とする対数で表す

と, $-1 = -\log_{0.5} 0.5 = \log_{0.5} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_{0.5} 2$ となる。よって不等式は,

$$\log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5} x < \log_{0.5} 2 \Leftrightarrow \log_{0.5} x(x-1) < \log_{0.5} 2$$

となる。底が $0 < 0.5 < 1$ であるので, 対数関数 $y = \log_{0.5} x$ は単調減少。よって, 真数が大きい方が対数の値は小さいので, 真数を比較して $x(x-1) > 2$ となる。これを解くと,

$$(x+1)(x-2) > 0 \text{ より, } x < -1 \text{ または } x > 2 \cdots \textcircled{2}$$

となり, ①, ②より, $x > 2$ であることがわかる。

◆ 常用対数

(1) 10 を底とする対数を**常用対数**という。常用対数表は最初の縦の欄が真数の小数第 1 位までを表し、最初の横の欄が小数第 2 位の数字を表す。10 以外の底の対数の値も、底の変換公式を使えば、常用対数表の数値の商として計算することができる。

(2)

$$\textcircled{1} \text{ 自然数 } N \text{ が } n \text{ 桁} \Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n \Leftrightarrow n-1 \leq \log_{10} N < n$$

$$\textcircled{2} N > 0 \text{ は小数第 } n \text{ 位に初めて } 0 \text{ 以外が現れる} \Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1} \Leftrightarrow -n \leq \log_{10} N < -n+1$$

□例□ $\log_{10} 2 = 0.301$ のとき、 $30 \leq \log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 30.1 < 31$ より、 2^{100} は 31 桁である。

◆ 自然対数

(1) 極限值 $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 2.71828\cdots$ を底とする対数を**自然対数**という。通常、自然対数を単に対数といい、底を省略し $\log x$ と表すことが多い。自然対数を記号で $\ln x$ と表すこともある。

(2) e は無理数であることが知られており、 $e = 2.71828\cdots$ は「フナイチハニワ」と覚えると良い。

■ 指数は和→積、対数は積→和へと変形する。

指数関数は関数方程式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たし、対数関数は関数方程式 $f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たすことからわかるように、指数は和を積にし、対数は積を和にする性質がある。このことを利用する式変形は少なくないので、認識しておこう。

■ 4. 合成関数・逆関数・逆三角関数・双曲線関数

◆ 合成関数

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 関数 $g(f(x))$ を f と g の合成関数という。

□例□ $f(x)=2x+5$, $g(x)=x^2-1$ とすると, 合成関数 $g(f(x))=g(2x+5)=(2x+5)^2-1=4x^2+20x+24$ となり, 合成関数 $f(g(x))=f(x^2-1)=2(x^2-1)+5=2x^2+3$ となる。

□例□ $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\sqrt{x}$ とする。 $-1<x<1$ のときは, $f(x)<0$ より, 合成関数 $g(f(x))$ は実数上で定義できないことになる。

(2) 一般に, $g(f(x)) \neq f(g(x))$ である。

◆ 逆関数

(1) 関数 $y=f(x)$ に対して, x と y を入れ替えて $x=f(y)$ とし, これを $y=f^{-1}(x)$ の形に書き換えたとき, 関数 $f^{-1}(x)$ を $f(x)$ の逆関数という。

【+α】 逆関数は x と y が 1:1 対応のとき存在する。

□例□ 指数関数 $y=f(x)=2^x$ に対して, x と y を入れ替えて $x=f(y)=2^y$ とし, この両辺に底が 2 の対数をとると, $\log_2 x = y$ となる。よって, 逆関数は $f^{-1}(x)=\log_2 x$ である。ただし, $x=2^y > 0$ より, 逆関数 $f^{-1}(x)=\log_2 x$ は $x \leq 0$ で定義できないことがわかる。

(2) 一般に, $y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは, 直線 $y=x$ に対して線対称になる。

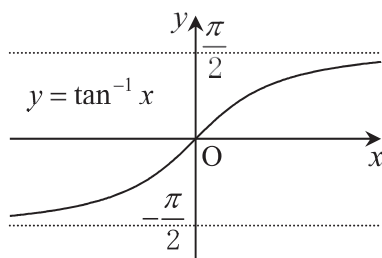
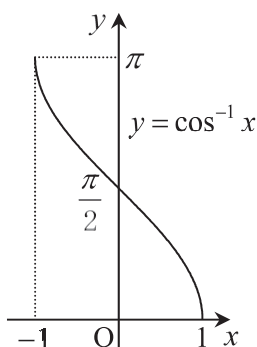
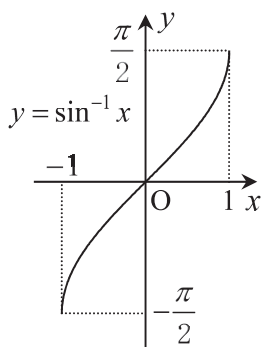
◆ 逆三角関数

(1) 例えば, 関数 $y=\sin x$ は x の変域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とすると, y の変域は $-1 \leq y \leq 1$ で 1:1 対応の関数になるので, 逆関数を考えることができる。これを $\sin x$ の逆三角関数といい, 記号で $\sin^{-1} x$ または $\arcsin x$ と表すことができる。同様に, $\cos x$, $\tan x$ の逆三角関数も定義できる。

$$(2) \quad y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1 \right) \quad \xleftrightarrow{\text{逆関数}} \quad y = \sin^{-1} x \left(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(3) \quad y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1) \quad \xleftrightarrow{\text{逆関数}} \quad y = \cos^{-1} x \quad (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$$

$$(4) \quad y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty \right) \quad \xleftrightarrow{\text{逆関数}} \quad y = \tan^{-1} x \left(-\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$



・ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\tan x}$ のことではないので注意。明確に区別したい場合は、逆三角関数を $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ (アーク・サイン/コサイン/タンジェント) と表記する。

□例□ $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ の値を求めよ。:

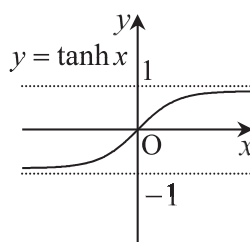
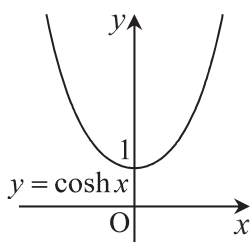
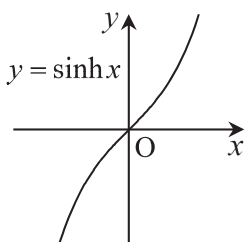
$\alpha = \sin^{-1} x$, $\beta = \cos^{-1} x$ と置くと, $x = \sin \alpha = \cos \beta$ である。また, $\cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ であり, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ である。よって, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

◆ +α 双曲線関数

(1) 次の関数たちを**双曲線関数**という。※ハイパボリック・サイン/コサイン/タンジェントと読む。

特に $\cosh x$ のグラフは懸垂曲線と呼ばれる。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ。※双曲線の標準形の方程式になっている。

(3) 次の加法定理が成り立つ。

① $\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta$ (複号同順)

② $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta$ (複号同順) ※符号に注意。

③ $\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh \alpha \pm \tanh \beta}{1 \pm \tanh \alpha \tanh \beta}$ (複号同順) ※符号に注意。

■ 5. 極限

【過去問演習 1-4】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2})$ の極限值として正しいのはどれか。

(H20 防衛省 II 種-建築)

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $\frac{3}{2}$ 4. 4 5. 0

■ 解説

求める極限值は $\infty - \infty$ の不定形なので、 $\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2}$ を逆有理化すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2} &= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2}} \\&= \frac{(x^2 + x + 2) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2}} \\&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2}}\end{aligned}$$

となる。よって、求める極限值は分母、分子を x で割って、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

となる。よって、正解は 1 となる。

◆ 極限值

(1) x の関数 $f(x)$ において、 x が a 以外の値をとりながら、 a に限りなく近づくときに、その近づき方によらず $f(x)$ の値がある一定の値 α に限りなく近づくならば、 $f(x)$ は極限值 α に収束するといい、記号で $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と表す。

(2) 極限の性質： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であるとき、

- ① $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$ (k, l は定数)
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$
- ④ $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$
- ⑤ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$

◆ 不定形の極限值

極限值がその式の形だけでは明白でないものを**不定形**という。不定形の極限值を求めるには次の方針が有効であることが多い。

- (1) $\frac{0}{0}$ 型：分数式では約分，無理式では(逆)有理化を考える。
- (2) $\frac{\infty}{\infty}$ 型：分数式では分母の最高次の項で分母，分子を割る。
- (3) $\infty - \infty$ 型：整式ではくくり出し，無理式では(逆)有理化を考える。
- (4) $\infty \times 0$ 型：(1)または(2)と同様に考える。
- (5) $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型：対数を取り， $\infty \times 0$ 型に帰着させる。

◆ 重要な極限值

(1) **x の累乗**： $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \begin{cases} +\infty & (k > 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases}$

(2) **無限等比数列**： $\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} +\infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (-1 < r < 1) \\ \text{振動} & (r \leq -1) \end{cases} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \infty} r^x} \right\} \text{収束}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

◆ ロピタルの定理

(1) 関数 $f(x)$ ， $g(x)$ が n 階微分可能で， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ または $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ のとき， $\frac{0}{0}$ 型， $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定形の極限值に対して，次の式(**ロピタルの定理**)が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \cdots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

□例□ 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ。：

$\frac{0}{0}$ 型の不定形なので，ロピタルの定理より，3 階微分まで考えて (2 階微分までだと $\frac{0}{0}$ 型のまま)，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

(2) その他の不定形でもロピタルの定理が使える形へ帰着できる。

① $\infty - \infty$ 型の場合は, $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ として, $\frac{0}{0}$ 型に帰着させる。

② $\infty \times 0$ 型の場合は, $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ または $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ として, $\frac{0}{0}$ 型か $\frac{\infty}{\infty}$ 型に帰着させる。

③ $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型の場合は, 対数をとって, $\infty \times 0$ 型に帰着させる。

■ ロピタルは万能だが注意が必要！

ロピタルの定理は万能で, 公式として載っている重要かつ基本的な極限值も計算することができる。しかし, 注意点が2つ。①微分が正確にできること, ②不定形の $0/0$ 型, ∞/∞ 型以外に使用してはならない。これらは本当に気をつけなければいけない。

〈例〉 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x}$ について, ロピタルの定理を使おうとすると,

$$(\text{分子})' = (x - 2\cos x)' = 1 + 2\sin x, \quad (\text{分母})' = (x)' = 1$$

となるので, 与式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sin x}{1}$ となるが, これでは極限を求められない。もちろん, 分子および分母で微分を繰り返しても同様のことが起こる。

これは分子に含まれる $\cos x$ の値が $x \rightarrow \infty$ で変動 (-1 と 1 の間をウロウロする) するので, 単純に $\frac{\infty}{\infty}$ と確定できないためである。本問の場合, $-1 \leq \cos x \leq 1$ であることを利用して,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 \times 1}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 \times (-1)}{x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と考え, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x}$ の範囲を絞った上で (はさみうち), ①より,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x}$$

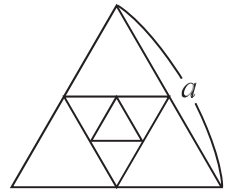
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1}$$

となり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1} = 1$ であることから, はさまれた $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x}$ も, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2\cos x}{x} = 1$ となることがわかる。

■ 6. 無限級数

【過去問演習 1-5】図のように、一辺の長さ a の正三角形の内部に辺の中点を結んだ正三角形を作る。さらに、その正三角形の内部に辺の中点を結んだ正三角形を作る。このようにして正三角形の内側に、無限に正三角形を作っていったとき、その面積の総和はいくらになるか。

(H18 防衛省Ⅱ種-建築)



1. $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$ 2. $\frac{1}{\sqrt{3}}a^2$ 3. $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$ 4. $\sqrt{3}a^2$ 5. $3a^2$

■ 解説 ■

一辺の長さ a の正三角形の面積を S_1 とすると、 $S_1 = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ である。その中点を結んだ正三角形の一辺の長さは半分の $\frac{1}{2}a$ であり、もとの正三角形との相似比は $1 : \frac{1}{2}$ である。

よって、面積比は $1^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 : \frac{1}{4}$ であるから、中点を結んだ正三角形の面積 S_2 は、 $S_2 = \frac{1}{4}S_1$ である。

同様に、さらに中点を結んだ正三角形の面積 S_3 は、 $S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1$ となるので、正三角形の面積の数列 $\{s_n\}$ は初項 S_1 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。

よって、求める面積の総和は、初項 S_1 、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2$$

となる。よって、正解は 2 となる。

◆ 数列

(1) **数列**とは、数字を1列に並べたものを指し、その数字1つ1つを数列の**項**という。一般的に数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を $\{a_n\}$ と表す。 a_1 を初項、 a_2 を第2項、 $\dots$ 、 a_n を第 n 項という。

(2) 項の個数が有限であるものを有限数列、項が限りなく続くものを無限数列という。有限数列においては、項の個数を**項数**、最後の項を**末項**という。

(3) 第 n 項 a_n が n の式で表されるとき、これを数列の**一般項**という。また、初項から第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を記号 S_n で表すことが多い。この和も数列 $\{S_n\}$ として考えられる。

【過去問演習 1-6】等差数列 $\{a_n\}$ において、 $a_{10}-a_6=8$ 、 $5a_3=7a_2$ であるとき、 $a_8+a_9+a_{10}$ はいくらか。

(H26 国家一般職)

1. 57 2. 60 3. 63 4. 66 5. 69

■解説■

等差数列では、

① 一般項＝初項＋(項の番号－1)×項差

② 等差数列の和＝ $\frac{(\text{初項}+\text{末項})\times\text{項数}}{2}$

をまず考える。初項を a_1 、項差を d とおくと、 $a_{10}-a_6=8$ より、

$$\begin{aligned} a_{10}-a_6 &= \{a_1+(10-1)\times d\}-\{a_1+(6-1)\times d\} \\ &= \{a_1+9d\}-\{a_1+5d\} \\ &= 9d-5d \\ &= 4d=8 \text{ より、} d=2 \quad \cdots\text{①} \end{aligned}$$

となる。また、 $5a_3=7a_2$ より、

$$\begin{aligned} 5\times\{a_1+(3-1)\times d\} &= 7\times\{a_1+(2-1)\times d\} \\ 5a_1+10d &= 7a_1+7d \end{aligned}$$

①より、 $d=2$ なので、

$$\begin{aligned} 5a_1+20 &= 7a_1+14 \\ (7a_1-5a_1) &= (20-14) \\ 2a_1 &= 6 \text{ より、} a_1=3 \quad \cdots\text{②} \end{aligned}$$

となり、 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$ であることがわかる。求めるものは $a_8+a_9+a_{10}$ なので、

$$\begin{aligned} a_8+a_9+a_{10} &= (2\times 8+1)+(2\times 9+1)+(2\times 10+1) \\ a_8+a_9+a_{10} &= 17+19+21=57 \end{aligned}$$

となり、選択肢 1 が正解となる。

◆ 等差数列

(1) 等差数列：初項に一定の数を次々に足してできる数列。この一定の数を公差という。

(2) 等差数列の一般項：初項 a_1 、公差 d の等差数列の一般項 a_n は、

$$a_n = [\text{初項}] + [\text{項の番号}-1] \times [\text{公差}] = a_1 + (n-1)d$$

(3) 等差数列の和の公式：初項から第 n 項までの和 S_n は、 $[\text{平均}]\times[\text{項数}]$ と考えて、

$$S_n = \frac{[\text{初項}]+[\text{末項}]}{2} \times [\text{項数}] = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_n) \times n \quad \left(= \frac{1}{2} \times \{2a_1 + (n-1)d\} \times n \right)$$

□例□ 等差数列, 1, 3, 5, 7, …は初項 1, 公差 2 だから, 第 n 項 a_n は,

$$\begin{aligned}a_n &= [\text{初項}] + [\text{項の番号} - 1] \times [\text{公差}] \\&= 1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1\end{aligned}$$

初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$S_n = \frac{[\text{初項}] + [\text{末項}]}{2} \times [\text{項数}] = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \times n = n^2$$

□例□ 1 ～ n までの自然数の和を求めよ。

初項 1, 末項 n , 項数 n の等差数列

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \times ([\text{初項}] + [\text{末項}]) \times [\text{項数}] = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

(4) **等差中項** : 数列 a, b, c がこの順で等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$

(5) **等差数列の和の最大値・最小値** : 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\{S_n\}$ について,

- ① 初項が正, 公差が負のとき $\Rightarrow a_n$ が正, a_{n+1} が負となる n のときに, S_n は最大値をとる。
- ② 初項が負, 公差が正のとき $\Rightarrow a_n$ が負, a_{n+1} が正となる n のときに, S_n は最小値をとる。

□例□ 初項 7, 公差 -3 の等差数列について, 初項から第何項までの和が最大になるか。:

数列は初項から, 7, 4, 1, -2 , -5 , …と単調に減少している。和は最初, 一般項が正なので, 単調に増加していくが, 符号が初めて負に変わる -2 まで加えると和は小さくなるので, 一般項 < 0 となる項の直前の項までの和(この場合, $7 + 4 + 1 = 12$)が最大となる。

◆ 等比数列

(1) **等比数列** : 初項に一定の数を次々掛けてできる数列。この一定の数を**公比**という。

(2) 初項 a_1 , 公比 r の等比数列 a_n は,

$$a_n = [\text{初項}] \times [\text{公比}]^{[\text{項の番号} - 1]} = a_1 r^{n-1}$$

(3) 初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ na_1 & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

□例□ 等比数列, 1, 2, 4, 8, …は初項 1, 公比 2 だから, 第 n 項 a_n は,

$$a_n = [\text{初項}] \times [\text{公比}]^{[\text{項の番号} - 1]} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

・等比数列の和の公式の導き方

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = a_1 (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

の両辺を r 倍すると、

$$rS_n = a_1 (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。②－①より、

$$rS_n - S_n = a_1 (r^n - 1), \quad (r-1)S_n = a_1 (r^n - 1)$$

となり、 $r \neq 1$ のとき、両辺を $(r-1)$ で割ればよい。

(4) **等比中項**：数列 a, b, c がこの順で等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = ac$

□例□ $1, a, b$ が等比数列、 $a, 1, b$ が等差数列であるとき、異なる数 a, b を求めよ。：

$1, a, b$ が等比数列 $\Leftrightarrow a^2 = b, \quad \cdots \textcircled{1}$, $a, 1, b$ が等差数列 $\Leftrightarrow 2 = a + b \Leftrightarrow b = 2 - a \quad \cdots \textcircled{2}$ であるから、②を①に代入して、 $a^2 = 2 - a, \quad a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) = 0$ となり、 $a = -2, 1$ である。 $a = 1$ のとき、②より $b = 1$ となり、 a, b は異なるので不適。よって、 $a = -2, b = 4$ である。

◆ Σ計算

(1) **Σ記号**： $\sum_{k=a}^b (k \text{ の式}) = \text{「} k \text{ の式」の } k \text{ に } a \text{ から } b \text{ まで順番に代入した値をすべて足す}$

□例□ $\sum_{k=3}^5 k^2 = \text{「} k^2 \text{」の } k \text{ に } 3 \text{ から } 5 \text{ まで順番に代入した値をすべて足す} = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$

(2) **Σ記号の基本性質**

① $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ ※複数の有限項からなる数列の和は分けて計算して足せばよい。

② $\sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k$ (p は k に無関係な定数) ※共通因数はくくり出せる。

(3) **Σ記号の公式**

① $\sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ 個の和}} = nc$, 特に, $\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ 個の和}} = n$

② $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

③ $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

④ $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

⑤ $\sum_{k=1}^n r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$

□例□ 数列 $\{a_n\}$ が初項1、公差2の等差数列のとき、一般項は $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ であるから、初項から第 n 項までの和 S_n は、

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \text{「}a_k\text{」の}k\text{に}1\text{から}n\text{まで順番に代入した値をすべて足す}} = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

なので、 $\sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n (-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n = n^2$ と Σ の公式で求まる。

◆ 階差数列・数列の和と一般項

(1) 階差数列：数列の隣りあった後の項から前の項を引いた差がつくる数列。

$$b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \quad \cdots, \quad b_{n-1} = a_n - a_{n-1}, \quad b_n = a_{n+1} - a_n, \quad \cdots$$

のとき、数列 b_n が a_n の階差数列である。ここで、 b_1 から b_{n-1} まで両辺を足すと、

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1 \text{ となるので、次が成り立つ。}$$

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = [\text{初項}] + [\text{階差数列の和}]$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$a_1 = S_1, \quad n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1}$$

◆ 部分分数分解

$\frac{1}{k(k+1)}$ は通分(1つの分数に)されているが、通分する前を逆算すると、

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \leftarrow \text{右から左にたどると通分}$$

となる。この通分の逆の操作を部分分数分解という。これを数列の和に使うことができ、

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

と $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ が打ち消しあうことで簡単に計算できる。

□例□ $\frac{1}{k(k+7)}$ の部分分数分解は、次のようになる。

$$\frac{1}{k(k+7)} = \frac{\frac{1}{7}\{(k+7)-k\}}{k(k+7)} = \frac{1}{7} \left\{ \frac{k+7}{k(k+7)} - \frac{k}{k(k+7)} \right\} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+7} \right)$$

つまり、通分の逆の操作を部分分数分解という。分数型の数列の和の計算では、

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

を用いて計算することが多い。

◆ 無限等比級数

(1) **無限級数**：数列の無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を無限級数といい、その収束、発散は部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ の作る数列 $\{S_n\}$ の収束、発散による。また、次のことが知られている。

① 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (逆は一般に成り立たない)

② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Rightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する (逆は一般に成り立たない)

【+α】 ①と②は対偶のかんけいにある命題である。

□例□ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。:

部分分数分解して $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ より、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

(2) **無限等比級数**：初項 $a_1 \neq 0$ 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の無限級数を無限等比級数といい、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n + \cdots = \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

□例□ 循環小数 $0.7 = 0.777777\cdots$ を分数に直せ。:

$0.777777\cdots = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \cdots$ より、初項 0.7 、公比 0.1 の無限等比級数だから $\frac{0.7}{1-0.1} = \frac{7}{9}$

※または、 $x = 0.777\cdots$ とおき、 $10x = 7.777\cdots$ であることから $10x - x = 7$ をつくる。

◆ 漸化式

(1) $a_{n+1} = a_n + 2$ のように、数列において、その前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を示す等式を^{ぜんかしき}漸化式という。これに、初項 a_1 の値を与えると数列は確定する。

(2) ① $a_{n+1} = a_n + d$: 公差 d の等差数列

② $a_{n+1} = r a_n$: 公比 r の等比数列

③ $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ($f(n)$ は n の式) : $\{a_n\}$ の階差数列が $\{f(n)\}$ 、一般項は $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

④ $a_{n+1} = p a_n + q$: $a_{n+1} - c = p(a_n - c)$ と変形 $\left(\text{特性方程式 } x = p x + q \text{ の解を } c = \frac{q}{1-p} \text{ とする} \right)$, $\{a_n - c\}$ が公比 p の等比数列。

⑤ $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$: $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$, $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ と変形 (特性方程式 $x^2 = p x + q$ の解を α, β とする), $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$, $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ が等比数列を利用。

(3) (2) にないタイプの漸化式は初項から値を代入し、規則性から一般項を推測する。