静定構造物の応力

第1節 応力

1. 応力とは

第1章で学習したように、骨組に荷重が作用すると、荷重につり合うように反力が生じる。これらの外力は、梁や柱などの部材を変形(伸ばす、縮める、ずらす、曲げるなど)させようとする。その変形に対応して部材内部に生じる力が応力である。

この変形させようとする力、つまり応力は、右図のように、大きさ等しく、向きを反対とする『**つり合う 1対 の力**』である。部材の任意の断面には、この 1 対の力が 生じている。



荷重と反力を合わせて、外力

2. 応力の種類

部材に生じる応力の種類は、次のとおり軸方向力(軸応力)、せん断力(せん断応力)、曲げモーメント(曲げ応力)の3種類である。

				1
応力の種類	部材に作用する力	一部断面の変形	応力図 $(N \boxtimes Q \boxtimes M \boxtimes)$ の描き方	
軸方向力 (N)	N → □ □ □ N 引張 ⊕ N → □ □ □ □ N 圧縮 ⊝	伸ばす力、縮める力 N → (→ N) N → N N → N N → N N → N N → N N	上側 [[一]] 下側 [[一]] 材軸に平行	静定ラーメンのN図、Q図 (+) (+) (+) (+)
せん断力 (<i>Q</i>)	Q 右下り ① を下り ①	# 5 + 7 P	集中荷重の場合 上側 下側 等分布荷重の場合 上側	骨組み外側(+) 骨組み内側(-)
曲げ モーメント (<i>M</i>)	M 下に凸(引張) ⊕ M	曲げるカ M(()) M M(()) M	四側(引き) 集中荷重 の場合 傾斜直線 等分布荷重の場合 放物線(2次曲線)	表側)に描く モーメント荷重の場合 M(供斜直線

① 軸方向力 (軸応力) 記号: N

力が部材軸方向に作用する場合、伸びたり縮んだりする変形をおこそうとする 力を軸方向力といい記号 N で表す。軸方向力には、引張力(引張応力)と圧縮力(圧縮応力)があり、引張力を(+)、圧縮力を(-)で表す。

② せん断力(せん断応力)記号:Q

力が部材軸に直角方向に作用する場合、部材軸に直角方向に**ずれる変形をおこ そうとする力**をせん断力といい記号 Q で表す。せん断力は、右下りのせん断力 e (+)、左下りのせん断力を (-) で表す。

③ 曲げモーメント(曲げ応力)記号: M

力による回転力が作用する場合、部材に**湾曲する変形をおこそうとする力**を曲 i ボモーメントといい記号 M で表す。曲 i モーメントは、上側が湾曲する場合を (+)、下側が湾曲する場合を (-) で表す。

第2節 静定ばりの応力計算

1. 応力計算の考え方

3種類の応力の大きさと向きを求めることが応力計算である。 応力の求め方は、まず最初に**反力を求め**、構造物に作用するすべての**外力を明らかにすることから始まる**。

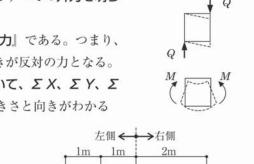
外力がつり合う構造物の部材の応力は、『**つり合う**一対の力』である。つまり、 任意の点の両側それぞれの力の総和は、大きさ等しく、向きが反対の力となる。 したがって、応力を求める点を切断し、どちらか片側について、 ΣX 、 ΣY 、 Σ M を求めれば、軸方向力、せん断力、曲げモーメントの大きさと向きがわかる

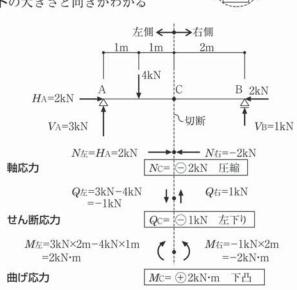
例えば、右の鉛直荷重 4kN と水平荷重 2kN が作用する単純梁について、反力は、図のように求められ、外力はつり合っている。

C点で切断し、右側、左側それぞれについて、 X方向の力、Y方向の力、モーメントの総和を求 めると、C点に生じる力は、図のように、左右ど ちらから求めても同じ値で、向きが反対である ことがわかる。

このように、応力の大きさは、求める点のどちらか片側について計算し求めることができる。

また、C点の応力は、一対の力なので、 $N_{C\pm}$ 、 又は $N_{C\pm}$ といった区別は必要なく、 N_{C} 、 Q_{C} 、 M_{C} 、と表現する。





Ž

29

2. 片持ち梁の応力計算

片持ち梁の応力計算は、支点が固定端1つだけなので、自由端側の外力があきらかである。したがって、反力を求めなくても、応力を自由端から求めることができる。

片持ち梁の応力は、反力計算を省略し、自由端から直接求める

■ 応力計算の手順 I (集中荷重が作用する場合)

① **応力を求める点で切断する**C 点で切断し、C 点の応力を求める

② 片側(自由端側)の力の総和を求める

(1) 軸方向力(N)

Nc = 1 kN (圧縮力⊝)

(2) せん断力 (Q)

 $Q_{\rm C} = 2 \, \text{kN} \, \left(\downarrow \uparrow \right)$

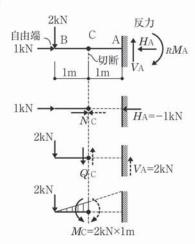
↓↑は、⊖のせん断力

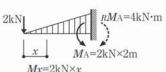
(3) 曲げモーメント (M)

$$M_{\rm C} = -2$$
 kN × 1 m = -2 kN·m
()は 上側凸

なお、A点の曲げモーメントも自由端から 計算して、

$$M_A = -2 \text{kN} \times 2 \text{m} = -4 \text{kN} \cdot \text{m}$$





したがって、荷重Pが作用する片持ち梁の自由端からの距離xの点の曲げモーメントはPxとなり、**荷重点からの垂直距離** (スパンの長さ) に比例して大きくなる。



N

MX

2 応力計算の手順Ⅱ (等分布荷重が作用する場合)

集中荷重と同様に自由端から計算すればよいのだが、求める位置によって自由端

側の荷重が変わることに注意しなければならない。

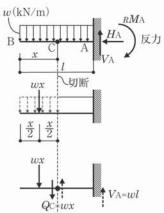
① 応力を求める点で切断する

自由端から距離 x の C 点で切断し応力を求める

- ② 片側(自由端側)の力の総和を求める C点より自由端側の等分布荷重を集中荷重に置き換える
- (1) 材軸方向に外力はなく、軸方向力は0
- (2) せん断力

 $Q_{C} = wx (\downarrow \uparrow) \Theta$ のせん断力

x なお、 $Q_A = wl (\downarrow \uparrow) \Theta$ のせん断力

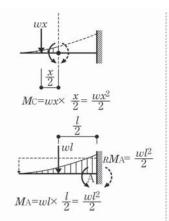


(3) 曲げモーメント

$$M_{\rm C} = wx \times \frac{x}{2} = \frac{wx^2}{2}$$
 ()は上凸

A点も同様に求めてみると、

$$M_{\rm C}=wl imesrac{l}{2}=rac{wl^2}{2}$$
 ()は上凸



3. 単純ばりの応力計算

単純ばりの応力計算は、最初に反力を求めてから応力を求める。

■ 応力計算の手順 I (集中荷重が作用する場合)

① 反力を仮定し、求める

$$\Sigma M_A = 6 \text{ kN} \times 1 \text{ m} - V_B \times 3 \text{ m} = 0$$

 $6 \text{ kN} \cdot \text{m} - 3 \text{ m} \times V_B = 0$ ∴ $V_B = 6 \text{ kN} \cdot \text{m} / 3 \text{ m} = 2 \text{ kN}$ (上向き)
 $\Sigma Y = V_A + V_B - 6 \text{ kN} = V_A + 2 \text{ kN} - 6 \text{ kN} = 0$ ∴ $V_A = 4 \text{ kN}$ (上向き)

② 応力を求める

求める点で切断し、どちらか片側で力の総和を求める。これは片側を片持ち梁 として、計算するのと同じことになる。

応力の変化は、荷重点間においては一定又は一様となるので、区間ごとに求める。

- (1) 材軸方向に外力がないので、AB間に軸方向力
- (N) は生じない。
- (2) せん断力 (Q)

わかりやすくするために、せん断力図(Q図)に、 外力を示した図で説明する。

 $A \sim C$ 間の任意の点で切断し、左側で計算する。 左側は、 $V_A = 4$ kN のみである。

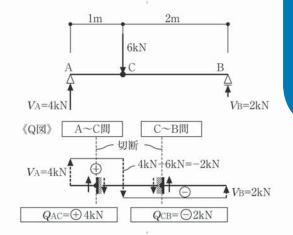
Q_{AC} = 4 kN (↑↓) 右下り⊕

 $C \sim B$ 間の任意の点の右側は、 $V_B = 2 \, \mathrm{kN}$ のみである。

Q_{CB} = 2 kN (↓↑) 左下り⊖

(なお、左側でも4kN - 6kN = -2kNとなり、両側で大きさ等しく向きが反対であることがわかる)

また、Q 図は、左側から順に外力を落とし込んでいくことで、簡単に描く ことができる。



(3) 曲げモーメント (M)

・ $A \sim C$ 間について、A 点からの距離 x の任意の点で切断し、左側のモーメ ントを求める。

 $M_{AC} = V_A \times x = 4 \text{ kN} \times x$

A点から 距離が離れるほど曲げモーメントは大 きくなり、C点で最大となる。

 \cdot C ~ B間について、B点からの距離x の任意の点 で切断し、右側のモーメントを求める。

 $M_{\rm CB} = V_{\rm B} \times x = -2kN \times x \ (\Gamma_1 \Gamma_1)$

B点から距離が離れるほど曲げモーメントは大きく なり、C点で最大となる。

左側でも $M_{CB} = V_A \times (3 \text{ m} - x) - 6 \text{ kN} \times 2 \text{ m}$ $= 4 \text{ kN} \times (3 \text{ m} - x) - 6 \text{ kN} \times (2 \text{ m} - x)$ $= 12kN \cdot m - 4kN \times x - 12kN \cdot m + 6kN \times x$ $= 2kN \times x$ (下凸) 左右で、大きさ等しく、向きは反対となる。

·A点、B点、C点、各荷重点の曲げモーメントを 求め、曲げモーメント図を描く。

A、B 支点は、回転力には抵抗できないので、曲げ モーメントも0になる。 $M_A = M_B = 0$

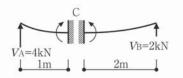
C点 切断し左側で計算する。これはC点を固定 端とした片持ち梁の計算とも考えられる。

荷重点間(外力と外力の間の区間)において、応力 は一定又は一様に変化するので、各点を直線で結び モーメント図を描く。

A~C間 切断 $V_A=4kN$ MAC左=VA×x(右回り) **M**CB右 C~B間 $V_{\rm B}=2kN$ MCB右=VB×x(左回り) 《M図》 C点で切断 $Mct=-2kN\times2m$ Mc $t=4kN\times1m$ $=4kN\cdot m$ $=-4kN\cdot m$ Mc= (+)4kN·m 下凸

 $V_A=4kN$

 $V_{\rm B}=2kN$



2 応力計算の手順Ⅱ (等分布荷重が作用する場合)

① 反力を仮定して、反力を求める

等分布荷重を集中荷重に置き換える。

 $\Sigma X = 0$: $H_A = 0$ 水平反力は生じない。

 $\Sigma M_A = 0 \downarrow 0$

 $6 \text{ kN} \times 1 \text{ m} - V_B \times 3 \text{ m} = 0$

 $6 \text{ kN·m} - 3 \text{ m} \times V_B = 0$ ∴ $V_B = 2 \text{ kN}$ (上向き)

 $\Sigma Y = 0 \downarrow 0$

 $V_{\rm A} + V_{\rm B} - 6\,\mathrm{kN} = 0$

 $V_{\rm A} + 2 \, \rm{kN} - 6 \, \rm{kN} = 0$ ∴ V_A = 4 kN (上向き)

3kN/m $V_A=4kN$ $V_{\rm B}=2{\rm kN}$

② 応力を求める

求める点で切断して、どちらか片側で計算する。片側を片 持ち梁として計算することと同じである。

AC 間と CB 間の区間ごとに考えてみる。

(1) 軸方向力(N)

材軸方向には外力がないので、N=0

(2) せん断力(Q)

せん断力図(Q図)に荷重状態を示した図で説明する。 等分布荷重が作用する場合は、単位長さごとにせん断力 が変化するので、まず、端部A点から求める。

・A点 反力 VA が作用している。 QA = 4 kN (↑↓) 右下り⊕

· AC 間

A点から離れるにしたがって、等分布荷重(3kN/m) の下向き荷重が作用するので、図のような傾斜直線となる。 あるところで、正(+)から、負(-)に変わる。

・C点 切断し、右側で計算する。C点右側には、VBのみ作用している。 $Q_{\rm C} = 2 \, \text{kN} \, (\downarrow \uparrow) \, \text{左下り} \Theta$ (なお、左側で計算しても、図のよう大きさ等しく、向きが反対の結果が得 られる。)

·CB間 右側には、反力 VB のみ作用している Q_{CB} = 2 kN (↓↑) 左下り⊖で、一定 各点を直線で結んで、せん断力図 (Q図) を描く。荷重の大きさ方向を左か ら順に落とし込んでいくことで、簡単に描くことができる。

(3) 曲げモーメント (M)

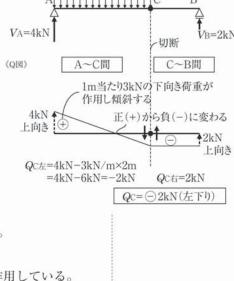
- · A点、B点 回転できる支点なのでモーメントは0 $M_{\rm A} = M_{\rm B} = 0$
- AC 間 A 点から距離 x の点で切断し、左側の外 力によるモーメントの総和が曲げモーメントとな

左側の等分布荷重を集中荷重に置き換えると3kN ×xとなり、

$$M_{AC} = 4kN \times x - (3kN \times x) \times \frac{x}{2}$$
$$= 4x - \frac{3x^2}{2}kN \cdot m$$

つまり、AC間のM図は、2次曲線になる。

・CB間 B点からの距離xの任意の点で切断し、右側のモーメントを求める。 $M_{\rm CB} = V_{\rm B} \times x = -2kN \times x = -2xkN \cdot m \ (\Box \Box)$



3kN/m

A~C間

曲げモーメント図(M図)の荷重状態を示した図で説明する。 B点から 距離が離れるほど、傾斜直線で、曲げモー メントは大きくなり、C点で最大となる。なお、左側 でモーメントの総和を求めても、図のように、大きさ 等しく、向きが反対の結果が求められる。

・C点 切断し、右側で計算する $M_{\rm C} = -2\,\mathrm{kN} \times 1\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$ (()) は、下凸

③ せん断力と曲げモーメントの関係

せん断力図(Q図)と曲げモーメント図(M図)に作用 する外力を示した図で解説する。

(1) せん断力の正(+)・負(-)が変わる点(せん断力が0となる点)で、 曲げモーメントは最大となる

曲げモーメントの大きさは、各点の片側のせん断力 図(Q図)の面積の総和である。

例えば、C点の曲げモーメントは、Q図右側のCB間 の四角形の面積となり、左側の AX 間の (+) の直角三 角形の面積と XC 間の (-) の直角三角形の面積の差で ある (当然いずれも、絶対値は同じ)。

つまり、せん断力が正又は負どちらか一定の範囲で は、距離に応じて、曲げモーメントは増加し、正・負 が変わる点を過ぎると、減少していくことになる。

(2) 『曲げモーメントが最大となる位置』及び『最大曲 げモーメント」を求める

右の図で、せん断力がOになる点Xの位置を求める。 X 点で切断し、左側でせん断力を計算すると、

$$Q_{\rm X} = 4 \,\mathrm{kN} - 3 \,\mathrm{kN/m} \times x = 0$$

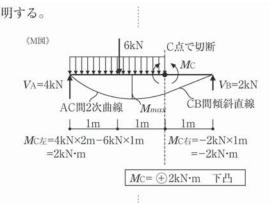
$$\therefore x = \frac{4}{3}$$
 m

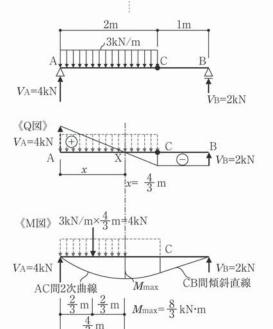
したがって、最大曲げモーメント M_{max} が生じるのは、A 点から $\frac{4}{2}$ m の位 置である。そのX点で切断し、左側で曲げモーメントを計算する。

等分布荷重を集中荷重に置き換えると、 $3kN/m \times \frac{4}{2}m = 4kN$ なので、

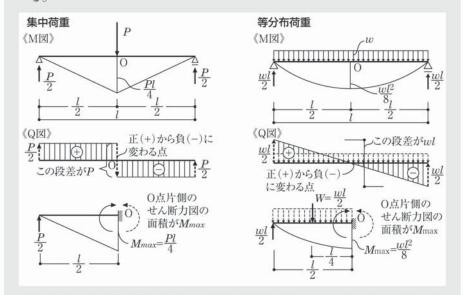
 $M_{max\pm} = 4kN \times \frac{4}{3}m($ 右回り $)-4kN \times \frac{2}{3}m($ 左回り $) = \frac{8}{3}kN \cdot m$

試験においては、特に、最大曲げモーメントが生じる位置をせん断力図から 求められるようにしておく必要がある。





●せん断力の正負が変わる(0になる)位置で、曲げモーメントは最大にな



- ②せん断力の面積の総和(積分したもの)が曲げモーメントであることから、
 - ・せん断力が一定
- ⇒ 曲げモーメントは傾斜直線(せん断力が傾斜
 - 勾配)
- ・せん断力が傾斜直線 ⇒ 曲げモーメントは2次曲線
- ・せん断力が 0
- ⇒ 曲げモーメントは生じない(又は一定)

3 応力計算の手順Ⅱ(モーメント荷重が作用する場合)

① 反力を仮定して、反力を求める

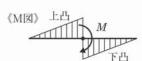
第1章で学習したように、反力計算においては、モーメント荷重の作用 点にかかわらず、反力の偶力によりつり合うので、両端の反力の大きさは、 Mで、図のように向きを反対にする一対の反力となる。

② 応力を求める

求める点で切断して、どちらか片側で計算する。

(1) せん断力

どこで、切断しても材軸に垂直方向の力は、反力のみなので、図のよ 《M図》上出 うな一定のせん断力図となる。



《Q図》

(2) 曲げモーメント

曲げモーメントを計算するときは、反力計算と違い、モーメント荷重の作用 点が影響する。荷重点で、モーメント荷重の分の段差が生じる。

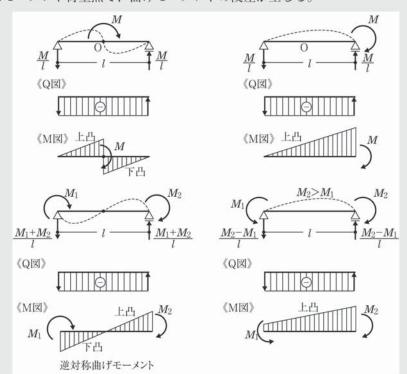
AO間 切断し、左側で計算すると、反力 $\frac{M}{l}$ により、

 $M_{AO} = \frac{M}{l} \times x$ となり、O点で、最大 $\frac{M}{2}$ (上凸) となる。

OB間 切断し、右側で計算すると、AO 間と同じく、O 点で、最大 $\frac{M}{2}$ (下 凸) となる。

このように、モーメント荷重の作用点で、モーメント荷重Mの段差が生じることがわかる。

- ●反力は、モーメント荷重の総和の偶力となる。
- 2軸方向力は作用しない。
- ❸せん断力は、反力のみなので、一定となる。
- ●モーメント荷重点で、曲げモーメントの段差が生じる。



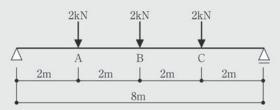


逆対称曲げモーメント

部材の両端に逆対称の曲げ モーメントが作用する場合を いう。

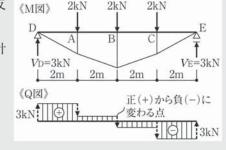
地震時の部材に生じる曲げ モーメントで、曲げモーメン トからせん断力、せん断力か ら曲げモーメントを求めると きに必要な公式として覚えて おく。

●単純ばりにおいて、B点の曲げモーメントの大きさと、A~B間のせん 断力の大きさを求めよ。



〔解答〕

$$M_{\rm B} = V_{\rm D} \times 4$$
m $- 2$ kN $\times 2$ m
= 3kN $\times 4$ m $- 4$ kN·m
= 8kN·m

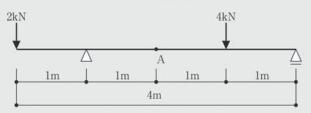


AB 間のせん断力 QAB は、左側で

$$Q_{AB} = V_D - 2kN = 3kN - 2kN = 1kN$$

(答 B点の曲げモーメント=8kN·m A~B間のせん断力=1kN(右下がり))

❷単純梁のA点の曲げモーメントの値求めよ。



[解答]

$$-2kN \times 1m + 4kN \times 2m - V_C$$

 \times 3m = 0

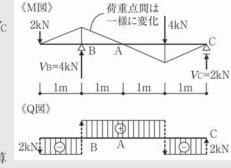
∴ V_C = 2kN (仮定の向き)

 $\Sigma Y = 0 \downarrow b$

 $-2kN + V_B - 4kN + V_C = 0$

∴ V_B = 4kN (仮定の向き)

A点のモーメントは、左側で計算 すると



$$M_{\rm A} = -2kN \times 2m + V_{\rm B} \times 1m = 0$$

(答 A 点の曲げモーメント=0

37

静定ラーメンの応力計算

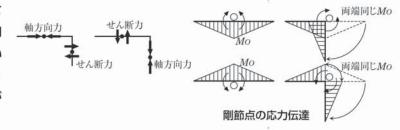
1. 静定ラーメンの応力

静定ラーメンは、部材数が2つ以上になるが、応力 計算の要領は、単純ばりと同様である。ただし、図の ように、鉛直荷重のみ作用する場合は、単純梁と同じ であるが、水平荷重が作用する場合は、回転支点側の 柱にせん断力が作用し、また水平荷重によるモーメン トにより鉛直反力も作用することから、各部材に生じ る応力も異なるので注意する。

また、柱と梁の接合部が剛節点であることは、直線 部材でなくとも、図のように、その両端で、大きさ等 しく、向きが反対の『つり合う一対の力』が生じるこ とに変わりないことを確認しておこう。

ただし、材軸が、縦と横の部材があるので、応力の種類が部材によって変化す

る。つまり、梁の軸方向力と柱のせ ん断力、梁のせん断力と柱の軸方向 力が、剛節点の両側でつり合ってい る。曲げモーメントは、直線部材と 同様に両端で大きさ等しく、向きが 反対でつり合う。



2. 片持梁系ラーメン

片持ち梁系ラーメンの応力計算は、片持ち梁と同様に、自由端側の外力が明ら かである。したがって、反力を求めなくても、応力を自由端から求めることがで きる。

片持ち梁系ラーメンの応力計算⇒自由端から直接求める

自由端に2kNの水平荷重が作用する片持ち梁系ラーメンの応力を求める。

① 応力を求める。

(1) 軸方向力(N)

各区間ごとに切断し、自由端側で計算 する。

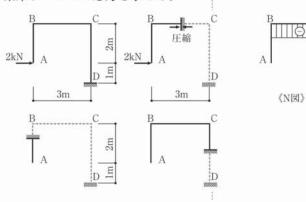
A~B間 鉛直力はない

 $N_{\rm AB}=0$

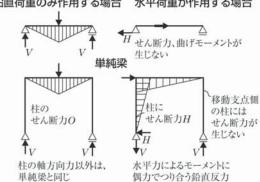
B~C間 2kNのみ作用する

 $N_{\rm BC} = 2 \, \text{kN} \, (圧縮力) \, \Theta$

C~D間



鉛直荷重のみ作用する場合 水平荷重が作用する場合



静定ラーメン

したがって、軸方向力は、梁のみに生じ、図のようなN図となる。

(2) せん断力(Q)

 $N_{\rm CD} = 0$

各区間ごとに切断し、自由端側で 計算する。

自由端側に鉛直力はない

A~B間

自由端側には2kNが作用してる

QAB = 2kN ⇒左下り⊖

自由端側に鉛直力はない

B~C間

 $Q_{\rm BC} = 0$

C~D間

自由端側には2kNが作用してる

Q_{CD} = 2 kN **⇒**右下り⊕

したがって、両柱にせん断力が生じ、図のような〇図となる。

2kN 2kN D.E

(3) 曲げモーメント(M)

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点 ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、

A点

 $M_{\rm A}=0$

B点

切断し、自由端側で計算する

モーメント図を求めることができる。

$$M_{\rm B} = -2\,\mathrm{kN} \times 2\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{kN \cdot m}$$

C点

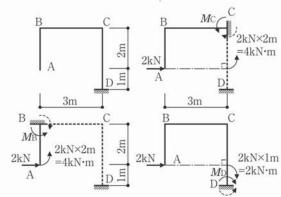
 $M_C = -2 \text{kN} \times 2 \text{m} = -4 \text{kN} \cdot \text{m}$

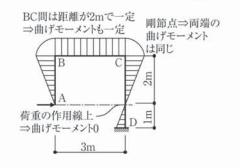
D点

 $M_D = 2 \text{kN} \times 1 \text{m} = 2 \text{kN} \cdot \text{m}$

A点、B点、C点、D点、各点の凸側(引張側) の点を結べば、図のような曲げモーメント図が出 来上がる。

ここで、CD間では、水平力2kNの作用線がと おる位置で、曲げモーメントが口の反曲点(正負 が変わる位置)が生じていることがわかる。





道

MD/E

 $V_{\rm B}=3{\rm kN}$

新体系テキスト

3. 単純梁系ラーメン

単純梁系ラーメンは、単純梁と同様に反力を求めてから応力を求める。

反力を求める → 求める点で切断 → 片側から応力を求める

水平力は、柱ではせん断力として、梁では軸方向力として作用するので、応力 の計算時には十分注意する必要がある。

① 反力を仮定して、反力を求める。

 $\Sigma X = 0$ より、 H_A を求める。

 $4 kN - H_A = 0$ ∴ $H_A = 4 kN$ (仮定の向き)

 $\Sigma M_{\rm A} = 0$ より、 $V_{\rm B}$ を求める。

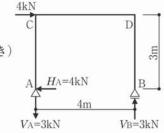
 $4 \text{ kN} \times 3 \text{ m} - V_B \times 4 \text{ m} = 0$

 $12kNm - 4m \times V_B = 0$: $V_B = 3kN$

 $\Sigma Y = 0$ より、 V_A を求める。

 $-V_{\rm A}+V_{\rm B}=0$

 $-V_A + 3kN = 0$ ∴ $V_A = 3kN$ (仮定の向きどおり下向き)





水平力4kNによるモーメント に対して、垂直反力の偶力で つり合っている。したがって、 V_A 、 V_B は、大きさ等しく向 きが反対となる。

② 応力を求める

求める点で、切断し片側で計算すれば、応力を求めることができる。ただし、 水平力の作用する静定ラーメンは、単純梁に比べ、計算がやや多くなってしまう ため、**切断部のどちら側で計算した方が効率的であるかの判断が重要**である。次 の解説では、あえて、左側で計算してみることにする。

(1) 軸方向力(N)

各区間ごとに切断し、A点側から計算する。

A~C間

下向き VA が作用する。

N_{AC} = 3 kN (引張力) ⊕

C~D間

水平力4kNと反力HAが作用する。

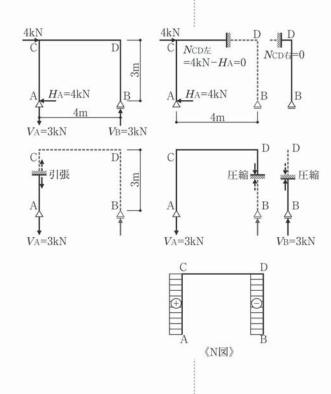
 $N_{\rm CD} = 4 \, \text{kN} - 4 \, \text{kN} = 0$

(なお、右側で計算すれば、水平力は作用 していないので、明らかに 0 であることがわ かる。)

$D \sim B$ 間 下向き V_A が作用する。

N_{DB} = 3 kN (圧縮力) ⊖

(右側で計算すれば、鉛直力は V_B 、結果は同じ。)



(2) せん断力(Q)

A~C間

反力 HA が作用する。

 $Q_{\rm AC} = 4 \, \mathrm{kN} \ (\ref{eq}) \oplus$

C~D間

反力 HA が作用する。

 $Q_{\rm CD} = 3 \,\mathrm{kN} \, \left(\downarrow\uparrow\right) \, \ominus$

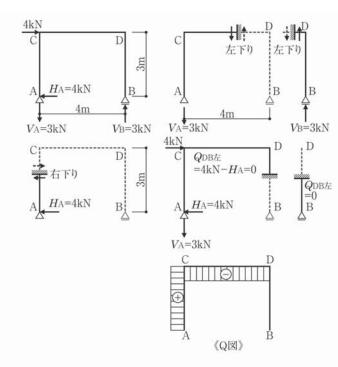
D~B間

水平力4kNと反力HAが作用する。

$$Q_{\rm DB} = 4 \, \mathrm{kN} - H_{\rm A} = 0$$

なお、DB 区間の右側で計算すれば、せん断力がないことから、明らかに $Q_{DB} = 0$ であることがわかる。

また、せん断力は、AC 間と CD 間に生じ、せん断力図は右図のようになる。



MD左=12-12=0

4kN*3m=12kN·m

4kN C 12kN·m

 $TV_{A}=3kN$

 $H_A=4kN$

 $IV_A=3kN$ 4m

 $H_A=4kN$

《M図》

 $V_{\rm B}=3{\rm kN}$

→-3kN×4m=-12kN·m

(3) 曲げモーメント(M)

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、モーメント図を求めることができる。

A点及びB点

回転する支点なので、

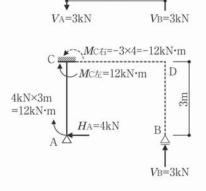
$$M_{\rm A} = M_{\rm B} = 0$$

C点

切断し、A点側で計算する

$$M_{\rm C} = 4 \,\mathrm{kN} \times 3 \,\mathrm{m}$$

= $12 \,\mathrm{kN \cdot m}$ ()



 $H_A=4kN$

D点

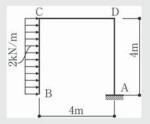
切断し、左側 (A 点側)で計算する。反力 H_A と反力 V_A によるモーメントの総和である。

 $M_{\rm D} = H_{\rm A} \times 3 \,\mathrm{m} - V_{\rm A} \times 4 \,\mathrm{m} = 4 \,\mathrm{kN} \times 3 \,\mathrm{m} - 3 \,\mathrm{kN} \times 4 \,\mathrm{m} = 0$

これは、右側(B点側)で計算すれば、移動支点には水平反力が作用しない ことから、右側柱には、せん断力も、曲げモーメントも生じない。

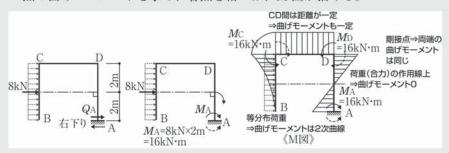
したがって、静定ラーメンの応力を計算するときは、**右側、左側のどちらが簡** 単に計算できるかを判断することが大切である。

lackbox $lackbox{ } lackbox{ }$



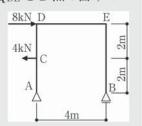
(ヒント)

片持梁系ラーメンの応力は自由端側から求める。なお、A、B、C、D 各点の曲げモーメントを求め、各点を結べば、M 図が描ける。



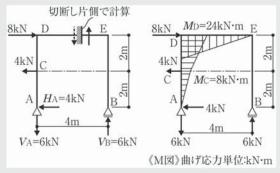
(答 $Q_A = 8 \text{ kN}$ $M_A = 16 \text{kN} \cdot \text{m}$)

②静定ラーメンにおいて、梁 DE に生じるせん断力 QDE と D 点の曲げモーメント MD の値を求めよ。
8kN D E



[ヒント]

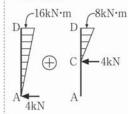
反力を求め、応力を求める点で切断し、片側からせん断力又は曲げモーメントを計算する。



(答 $Q_{DE} = -6 \text{ kN } (左下がり)$)、 $M_D = 24 \text{kN} \cdot \text{m}$

重ね合せの原理 (応力の組合せ)

AD 柱の曲げモーメントは、 H_A によるモーメントと C 点の水平荷重によるモーメントの重ね合せと考えることができる。



第4節 静定3ヒンジラーメンの応力計算

1. 静定3ヒンジラーメンの応力

静定ラーメンと同様に、反力を求めてから応力を求める。

反力を求める → 求める点で切断 → 片側から応力を求める

3 ヒンジラーメンのピン節点は、軸方向力とせん断力を伝達することはできるが、曲げモーメントは伝達できないので、曲げモーメントはゼロになる。つまり両側のそれぞれのモーメントの総和は必ず0となることに注目する。

なお、反力計算で示した、力のつり合い条件は、次の4式であることを確認しておこう。

$$\Sigma X = 0$$

 $\Sigma Y = 0$
 $\Sigma M = 0$
力のつりあい条件式
 $\Sigma M = 0$
ピン節点の $Mo = 0$ → ピン節点の曲げモーメントは 0 。

[3ヒンジラーメンの応力計算手順]

図の3ヒンジラーメンで、応力計算手順を説明する

① 反力を求める

$$\Sigma M_A = 0$$
 より、 V_B を求める。
 $8 \text{ kN} \times 1 \text{ m} - V_B \times 4 \text{ m} = 0$
 $8 \text{ kN} \cdot \text{m} - 4 \text{ m} \times V_B = 0$

$$\Sigma Y = 0$$
より、 V_A を求める。

$$V_{\rm A} + V_{\rm B} - 8\,\mathrm{kN} = 0$$

$$V_{\rm A} + 2\,\mathrm{kN} - 8\,\mathrm{kN} = 0$$

$$\therefore V_{\rm A} = 6 \, \mathrm{kN} \, ($$
上向き $)$

$$M_{\rm D}=0$$
より、 $H_{\rm B}$ を求める。

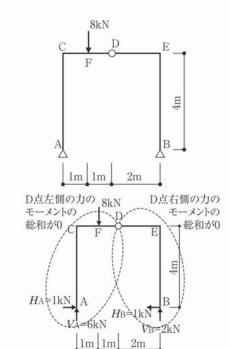
$$M_{\mathrm{D}}$$
 $= H_{\mathrm{B}} \times 4 \,\mathrm{m} - V_{\mathrm{B}} \times 2 \,\mathrm{m} = 0$

$$H_{\rm B} \times 4 \,\mathrm{m} - 2 \,\mathrm{kN} \times 2 \,\mathrm{m} = 0$$

$$\Sigma X = 0$$
より、 H_A を求める。

$$H_{\rm A} - H_{\rm B} = 0$$

$$H_A - 1 \,\mathrm{kN} = 0$$



② 応力を求める

(1) 軸方向力(N)

区間ごとに切断し片側で計算する。

AC間

 $N_{AC} = V_A = 6 \, \text{kN} \, (圧縮力 \ominus)$

CE間

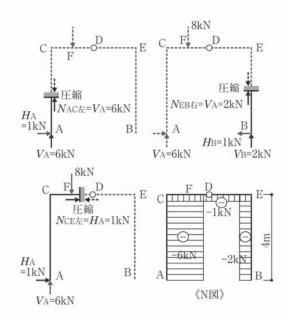
 $N_{\rm CE} = H_{\rm A} = 1 \, {\rm kN} \, (圧縮力 \Theta)$

CF 間、FD 間、DE 間については、軸方向力は、

HAのみ作用するので軸応力は同じ。

EB間

N_{EB} = 2 kN (圧縮力⊖)



(2) せん断力(Q)

区間ごとに切断し片側で計算する。

AC間

$$Q_{A \sim C} = H_{A} = 1 \text{ kN } (\leftrightarrows \ominus)$$

CF間

FD間、DE間

両区間は、左側の鉛直力は、 VAと8kNが作用しているので、

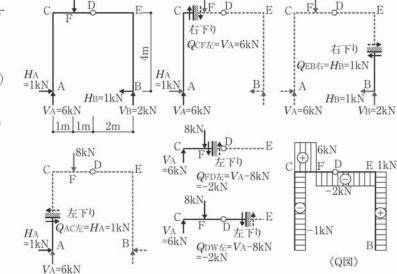
$$Q_{\rm F} \sim_{\rm E} = 6 \text{ kN} - 8 \text{ kN}$$

= $-2 \text{ kN} (\downarrow \uparrow \bigcirc)$

EB間 右側で計算する。

右側には、 H_B のみ作用する。

$$Q_{\rm E\,\sim\,B}=1\,{\rm kN}~(\rightleftarrows\oplus)$$



(3) 曲げモーメント (M)

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点 ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、モーメント図を求めることが できる。その時、ピン節点のD点では必ず曲げモーメントはゼロとなる点に 注意する。

各点の曲げモーメントをモーメント図を同時に描きながら、求めてみよう。

A点、B点、D点

$$M_{\rm A}=M_{\rm B}=M_{\rm D}=0$$

C点

$$M_{\rm C} = -H_{\rm A} \times 4 \,\mathrm{m}$$

= $-1 \,\mathrm{kN} \times 4 \,\mathrm{m}$
= $-4 \,\mathrm{kN \cdot m}$ (分側凸)

F点

HAと VAのモーメントの総和である。

$$M_{\rm F} = V_{\rm A} \times 1 \,\mathrm{m} - H_{\rm A} \times 4 \,\mathrm{m}$$

= $6 \,\mathrm{kN} \times 1 \,\mathrm{m} - 1 \,\mathrm{kN} \times 4 \,\mathrm{m}$
= $2 \,\mathrm{kN \cdot m}$ () (F.L.)

図のように、CF間の途中で、凸側が 梁の上端から下端に変わる。

D点

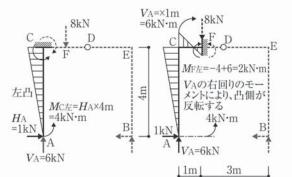
 $M_{\rm D}=0$

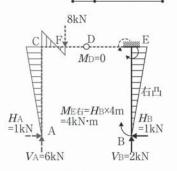
E点

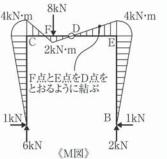
右側で計算すると、

$$M_{\rm E} = H_{\rm B} \times 4 \,\mathrm{m}$$

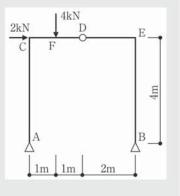
$$= 1 \text{ kN} \times 4 \text{ m}$$







●次のラーメンのE点の曲げモーメントを求めよ。



[解答]

《反力を仮定し、求める》

 $\Sigma M_{\rm A} = 0 \ \sharp \ 0$

 $2kN \times 4m + 4kN \times 1m - V_B \times 4m = 0$

 $\therefore V_{\rm B} = 3 \rm kN$

 $\Sigma Y = 0 \downarrow 0$,

 $V_{\rm A} + V_{\rm B} - 4kN = V_{\rm A} + 3kN - 4kN = 0$

 $\therefore V_A = 1kN$

 $M_D = 0$ より、D点の右側で計算する

(右側の方が計算が簡便である)

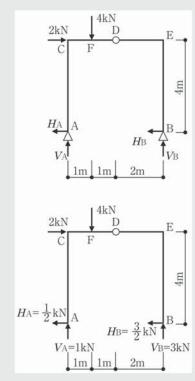
 $-V_{\rm B} \times 2 \text{m} + H_{\rm B} \times 4 \text{m} = 0$

 $-6kN \cdot m + 4H_B = 0$

$$\therefore H_{\rm B} = \frac{6kN \cdot m}{4m} = \frac{3}{2}kN$$

《E点の曲げモーメントを求める》

$$M_{\rm E} = H_{\rm B} \times 4$$
m $= \frac{3}{2}$ kN $\times 4$ m $= 6$ kN \cdot m



《各点の曲げモーメントを求めM図を描いてみよう》

残った反力 HA を求める。

 $\Sigma X = 0 \downarrow 0$

 $2kN - H_A - H_B = 0$

$$\therefore H_{\rm A} = \frac{1}{2} \, \rm kN$$

《各点の曲げモーメントを求める。》

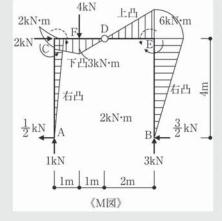
全ての外力が明らかになったところ で、各点の曲げモーメントを片側か ら計算し、求めていく。なお、 M_A 、 M_D 、 M_B の曲げモーメントは 0である。

$$M_{\text{C}} = \frac{1}{2} \text{kN} \times 4\text{m} = 2\text{kN} \cdot \text{m}$$

 $M_{\text{F}} = \frac{1}{2} \text{kN} \times 4\text{m} + 1\text{kN} \times 1\text{m}$
 $= 3\text{kN} \cdot \text{m}$

 $M_E = 6 \text{kN} \cdot \text{m}$

図のような曲げモーメント図となる。

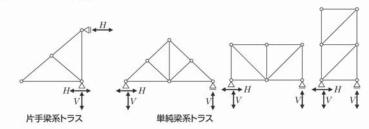


第5節 静定トラス

1. トラス構造

トラス構造とは、節点がピンで部材を三角形に組み立てた構造骨組みをいい、 片持ち梁系トラスと単純梁系トラスがある。トラス構造は、三角形に組み立てる ことで、軽量でもしっかりした骨組みを作ることができ、一般に屋根の小屋組み や、支点間距離の大きな梁を構成するのに用いられる。

また反力計算は、トラス骨組みを単一の部材 (一つの剛体) として、単純梁又 は静定ラーメンと同様に求めればよい。



2. トラスの応力

部材に生じる力(応力)を求める(トラスを解く)場合には、次の仮定を前提 とする。

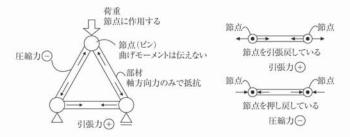
- 静定トラスの仮定 ① 三角形からなる節点がピンの骨組みである。
 - ② 外力は、節点に作用する。
 - ③ 部材は直線で、座屈はしないものとする。

以上の仮定から、トラスの部材に生じる力は、引張力か圧縮力の軸方向力のみ となる。せん断力と曲げモーメントは生じない。

静定トラスの応力
①部材に生ずる力は、軸方向力(引張力か圧縮力)のみ

②節点に集まる力は、つり合っている

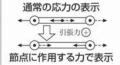
軸方向力の表示は、図のように、部材両端の節点に作用する一対の力で表示す る。引張力か圧縮力であるかは、節点を基準として考えて、節点を引張戻してい る場合が引張力(+)、節点を押し戻している場合が圧縮力(-)とする。





トラス部材の応力表示法

トラス部材に生じる応力 は、節点に作用する力と 同じなので、節点に作用 する一対の力で表現して



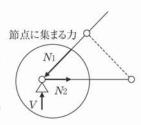
3. トラス部材の節点の性質

■ 節点のつり合い

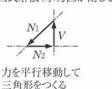
静定トラスの各節点に集まる力、つまり、 外力 (荷重・反力)、節点に作用する部材応 力はつり合う。

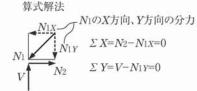
したがって、図のような支点反力 Vと部 材応力 N_1 、 N_2 の 3力が作用する節点の場合、図式解法では、3力のつり合う条件として、力の三角形が閉じる。

また、算式解法では、 N_1 のX方向、Y方向 の分力と反力V、 N_2 の4力について、 $\Sigma X =$ 0、 $\Sigma Y = 0$ の関係が成立する。



図式解法(示力図が閉じる)





2 節点の性質

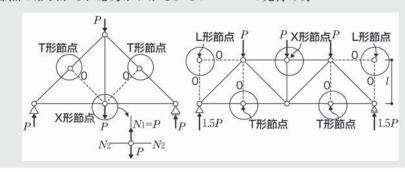
節点における力がつり合うことから、部材及び外力の集まる形状で、次のことがわかる。



- ① L形節点:節点に2つの力(部材)のみが作用する場合(一直線は除く)は、 2つの力とも零になる(ゼロ部材又はゼロメンバーという)。
- ② T形節点:節点に3つの力(部材)が作用し、2つの力が一直線の場合、他の力は零になる(ゼロ部材又はゼロメンバーという)。
- ③ X 形節点:節点に4つの力(部材)がそれぞれ一直線で接合している場合、 一直線どうしがそれぞれつり合っている。

Check Point

節点の形状から、応力がわかる。 0 メンバーの見付け方



4. トラスの解法

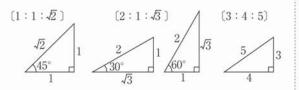
トラス部材の軸方向力を求める方法に、節点法と切断法がある。



一般に、全体の複数部材の応力を求める場合は、節点法を用い、トラス骨組みの一部の応力を求める場合は、切断法を用いることが多い。

また、試験に出題されるトラス骨組みの寸法は、直角三角形の辺の比に合せて 作成されているので、解答において、下記の比は絶対に覚えておかなければなら ない。

〔直角三角形の辺の比〕



11 節点法

次の片持ち梁系トラスで解説する。

節点法は、各節点に集まる力がつり合っていることを利用する解法である。各部材の応力を $N_A \sim N_I$ 、各節点をイ~へとして、各節点ごとに力を解明していく。

① 反力を求める

$$\Sigma Y = 0 \downarrow 0$$
, $V_{\pm} - P - P = 0$

∴ V_ホ= 2P (上向き)

$$\Sigma M = 0 \downarrow 0$$
, $2Pl + Pl - H + l = 0$

∴ H_ホ= 3P (仮定どおり左向き)

 $\Sigma X = 0 \downarrow 0$, $H \sim - H_{\pi} = 0 \downarrow 0$,

 $H_{\sim} = 3P$ (仮定どおり右向き)

モーメントに対して、Hへ、H_ホの偶力が 作用している。

② ゼロ部材を見つける

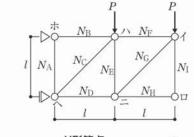
節点の外力と部材の形状で、L形節点、又はT形節点を見つけることで、応力が0となる部材を見つけることができる。

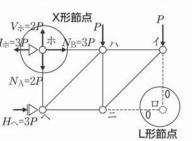
節点ロがL形節点であり、 $N_{\rm H}=N_{\rm I}=0$

また、節点ホが X 形節点なので、

 $N_{\rm B} = H_{\rm B} = 3P$ (節点を引張戻しているので引張力)

 $N_A = V_{*} = 2P$ (節点を引張戻しているので引張力)





③ 節点法で、応力を求める

各節点ごとに、次の手順で応力を求めていく。

〔節点法の解法手順〕

- ①力の少ない3力の節点から、順番に求め進めていく。
- ②3力~4力の節点は、図式解法 (示力図) により、「力の三角形」又は「力 の四角形 | を閉じて、直角三角形の辺の比を用いて求めるのが効率的。
- ③4カ~5カの多くの力が集まる節点では、算式解法により、一点に作用す る力のつり合い条件式 $(\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0)$ から求めるのが効率的。

(1) 節点イのつり合い

節点イに作用する荷重 P、NE、NG の3力はつり 合っている。

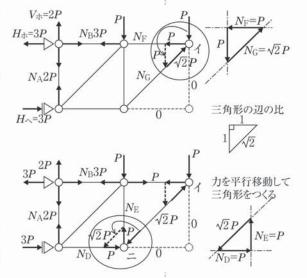
力を平行移動して、力の三角形 (示力図)を閉じる。 図のように、骨組み部材をそのまま利用して、描 くのが効率的である。

骨組みの寸法から、力の三角形の辺の比が1: $1:\sqrt{2}$ であることから、

 $N_{\rm F} = P$ (節点を引張戻しているので、引張力)

 $N_G = \sqrt{2} P$ (節点を押し戻しているので、圧縮力) であることがわかる。

また、 $N_{\rm F}$ 、 $N_{\rm G}$ は両端の節点に作用する一対の力 であるから、図のように、節点ハ、節点ニにも作用 する。



(2) 節点二のつり合い

次に、3力の作用する節点ニで、 $N_{\rm G}$ 、 $N_{\rm D}$ 、 $N_{\rm E}$ の3力で示力図を描く。 この場合も、骨組みを使うと効率が良い。同じく三角形の辺の比から、

 $N_D = P$ (節点ニを押し戻しているので、圧縮力)

 $N_{\rm E} = P$ (節点ニを引張戻しているので、引張力)

(3) 節点八のつり合い

節点ハにおいて、荷重 P 及び、 $N_F = P$ 、 $N_E = P$ 、 N_C 、 $N_B = 3P$ の5力のつり合いを考える。このように力の数が多い場合は、算式 解法が適している。

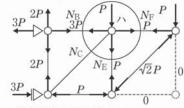
[算式解法]

節点ハにおいて、 N_C を図のようにX方向・Y方向の分力、 Ncx·Ncy に分ける。節点ハにおける力のつり合いから、

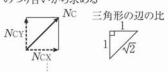
 $\Sigma Y = 0 \downarrow 0$

 $-P - N_{\rm E} + N_{\rm CY} = 0$

∴ N_{CY} = 2P (仮定のとおり上向き) $-P-P+N_{\rm CY}=0$



算式解法ではX·Y方向の 分力に分け、 ΣX 、 ΣY =0 のつり合いから求める



したがって、Ncの分力が2Pであれば、三角形の辺の比から、 $N_C = \sqrt{2} \times N_{CY} = 2\sqrt{2} P$ (節点ハを押し戻している圧縮力)

〔図式解法〕

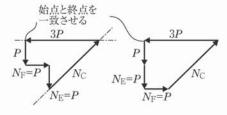
5力のうち、4力は大きさ、向きがわかっているので、図式 解法でも簡単に示力図を描くことができる。図のように明らか な力から右回りの順に、平行移動していき、示力図を閉じる。

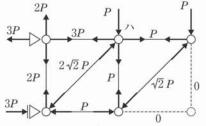
後は、三角形の辺の比から、求めることになる。

 $N_{\rm C} = 2\sqrt{2} P$ (節点を押し戻しているので、圧縮力)

なお、すべての部材応力を示した図は、右のようになる。

図式解法では、明らかな力から、平行移動 して、多角形の始点と終点を一致させる ・力を右回りに順に並べていくとかける。 多角形の形にこだわる必要はない。



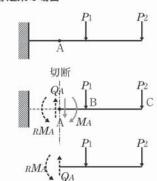


1 切断法

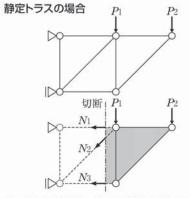
① 切断法の考え方

切断法の考え方は、単純梁の応力で学習した原理と同じである。求める点で、 切断し、片側で計算するだけである。

静定梁の場合



鉛直荷重P1、P2とA点に生じる力 MaとQaはつり合っている $[\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma M=0]$



P1、P2と切断部材の節点に作用する力(応力) N1、N2、N3の5つの力はつり合っている $[\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma M=0]$

図に、静定の片持ち梁と片持ち梁系トラスを示した。静定梁の場合、求める点 で切断し、片側(この場合は自由端)で計算して応力を求める。したがって、図 のように鉛直荷重 P_1 、 P_2 と A 点の応力(せん断力 Q_A と曲げモーメント RM_A) は、つり合い条件式 $[\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M = 0]$ を満足している。

トラスの場合も同様である。図のように切断した部材が節点に作用する力 Ni、 N_2 、 N_3 、と鉛直荷重 P_1 、 P_2 の5つの力は、つり合い、つり合い条件式 [$\Sigma X =$ 0、 $\Sigma Y = 0$ 、 $\Sigma M = 0$ を満足する。

② 切断法による解法手順

[切断法の解法手順]

- ①反力を求める。(片持ち梁は反力を求めなくても自由端側で計算できる)
- ②求める部材を含む3部材で切断する。
- ・つり合い条件式が3式なので、未知数は3つまで。
- ③片側を選択し、部材の応力を仮定する。
 - ・外力の少ない側を選択する方が効率的(片持ち梁は自由端側)
- ・仮定の向きは、とりあえず引張力としてよい。数値が(-)であれば、 仮定と反対の向きであることがわかる。
- ④力のつり合い条件式 $[\Sigma X=0$ 、 $\Sigma Y=0$ 、任意の点で $\Sigma M=0$] から、部材応力を求める。

次の図の片持ち梁系トラスの N_1 、 N_2 、 N_3 、を求める。

(1) 求める部材を含み切断

片持ち梁なので、反力計算は省略し、自由端側で計算する。 N_1 、 N_2 、 N_3 、を引張力(節点を引張戻す方向)に仮定する。

この時、 N_1 、 N_2 、 N_3 、 P_1 、 P_2 の 5 つの力は、つり合っている。 力のつり合いで学習した、5 力のつり合い問題である。

(2) 2力の作用線がとおる点で、モーメントのつり合いを考える

2力の作用線がとおる点では、その2力によるモーメントは生じない。したがって、 $\Sigma M=0$ 式において、未知数を1つに絞ることができる。

· D 点で $\Sigma M_D = 0$

 N_2 、 N_3 の作用線がとおるので、この2力のモーメントは生じない。

$$\Sigma M_D = P \times 2l + P \times l - N_1 \times l = 0$$

 $\therefore N_1 = 3P$ (仮定の向きどおり B節点を引張戻しているので 引張力)

・B 点で $\Sigma M_{\rm B} = 0$

 N_1 、 N_2 の作用線がとおるので、この 2 力のモーメントは生じない。

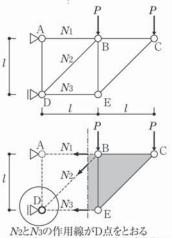
 $\Sigma M_{\rm B} = P \times l + N_3 \times l = 0$

 $\therefore N_3 = -P$ (-なので、仮定の向きと反対に、E節点を押し戻しているので圧縮力)

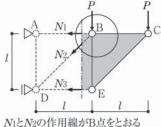
(3) 斜材を求める場合は、 $\Sigma X = 0$ 、又は $\Sigma Y = 0$ を使う

斜材は、作用線までの距離が求めづらいので、 N_2 を図のように X方向、Y方向の分力、 N_{2X} 、 N_{2Y} に分けてつり合いを考える。

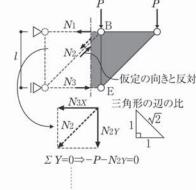
この問題の場合は、鉛直方向の外力は、下向きに合計 2 P なので、



 N_2 と N_3 の作用線がD点をとおる $\Rightarrow N_2$ と N_3 によるモーメントが生じない



N1とN2の作用線がB点をとおる ⇒N1とN2によるモーメントが生じない



$$\Sigma Y = -P - P - N_{2Y} = 0$$

 $\therefore N_{2Y} = -2P$ (-なので、仮定の向きと反対に、上向き) したがって、三角形の辺の比から、 $N_2 = \sqrt{2} N_{2Y} = 2\sqrt{2} P$ (B節点を押し戻している圧縮力)

③ 切断法による解法手順(単純梁の例)

次の平行弦トラスにおいて、 N_1 、 N_2 、 N_3 を求める。

(1) 反力を仮定して求める。

$$V_{\rm A} = V_{\rm B} = \frac{6\rm kN}{2} = 3\rm kN$$

(2) 応力を求める。

 N_1 、 N_2 、 N_3 を含んで切断し、左側で計算する。

 $\cdot \Sigma M_{\rm F} = 0$ により、 N_1 を求める。

 $3 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - 2 \text{ kN} \times 1 \text{ m} + N_1 \times 1 \text{ m} = 0$

 $4 \text{ kN} \cdot \text{m} + N_1 \times 1 \text{ m} = 0$

 $N_1 = -4$ kN (仮定の向きとは逆向き)

 N_1 は、D節点を押し戻しているので、

圧縮力 4kN

・ $\Sigma M_D = 0$ により、 N_3 を求める。

 $3 \text{ kN} \times 1 \text{ m} - N_3 \times 1 \text{ m} = 0$

: N₃ = 3kN (仮定どおりの向き)

E節点を引張り戻しているので、

引張力 3kN

・ $\Sigma Y = 0$ により、 N_2 を求める。 N_2 を X 方向、Y 方向に分解する。

$$V_{\rm A} - 2kN - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$3kN - 2kN - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$1kN - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

∴ $N_2 = \sqrt{2}$ kN (仮定どおりの向き)

D節点を引張り戻しているので、

引張力√2 kN

