

2021年目標

TAC 電験二種講座

基本テキスト

数学・理論



1-1 極限

重要度 ★★★

本節で説明する極限は機械・制御のラプラス変換で多用します。試験での使い方を例に解説していきます。ラプラス変換については 1-4 で学習しますので、まずは極限の基礎を押さえましょう。

■ 極限とは

きょくげん
極限とは、ある関数における変数がある値に限りなく近づくときの状態をいいます。例えば、関数 $f(x) = 2x$ について x が限りなく 1 に近づくときを式で表すと次のようになります。

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x$$



lim は limit（意味：極限）から名付けられています。

きょくげんち
極限值とは x が有限の値に限りなく近づくときに関数がとる値をいいます。上式の極限值は 2 になり、次のように表します。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x \\ &= 2 \end{aligned}$$



$x = 1$ のときの $f(x)$ を求めているように見えますが、厳密には上式は x が 2 に近づくときに $f(x)$ が近づく値を表しています。ただし、計算上は便宜的に代入して求めています。

■ 発散・収束

変数 x が近づく値によって極限值は変わります。例えば、関数 $f(x) = 2x$ について x が限りなく $+\infty$ に近づくときは、同じく $f(x)$ も $+\infty$ に近づきます。これを式で表すと次のようになります。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

このように、ある有限の値に近づきつつある x に応じて、 $f(x)$ が別のある有限の値に収束す

ることなく変わり続けることを^{はっさん}発散するといいます。



$+\infty$ (∞ は無限大を表す) は正の方向に限りなく大きい値を意味します。負の方向に限りなく大きい値は $-\infty$ と表します。

また、関数 $f(x) = \frac{3}{x}$ について x が限りなく $+\infty$ に近づくときは $f(x)$ は 0 に近づきます。これを式で表すと次のようになります。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

このように、ある値 (今回は 0) に近づくことを^{しゅうそく}収束するといいます。

関数 $f(x) = \sin x$ について x が限りなく $+\infty$ に近づくときは、収束するとも発散するともいえず、 $-1 \leq f(x) \leq 1$ の間で絶えず値が変わります。このことを^{しんどう}振動するといいます。

片側極限

x がある値に近づくときに、正の側 (右側) から近づく場合と負の側 (左側) から近づく場合で関数の極限值が異なる場合があります。

例えば、関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について x が 0 の右側から近づくときの極限值は次のようになります。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$



「 $x \rightarrow +0$ 」は x が 0 の右側から近づくことを表しています。 x が 1 の右側から近づく場合は「 $x \rightarrow 1+0$ 」と表されます。

x が 0 の左側から近づくときの極限值は次のようになります。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

このように、近づく方向を明示する極限を^{かたがわきよくげん}片側極限といいます。

なお、関数 $f(x) = 2x$ についてはあらゆる x 値における片側極限が左右で一致します。つまり、任意の値 a を用いて次のことがいえます。

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$$